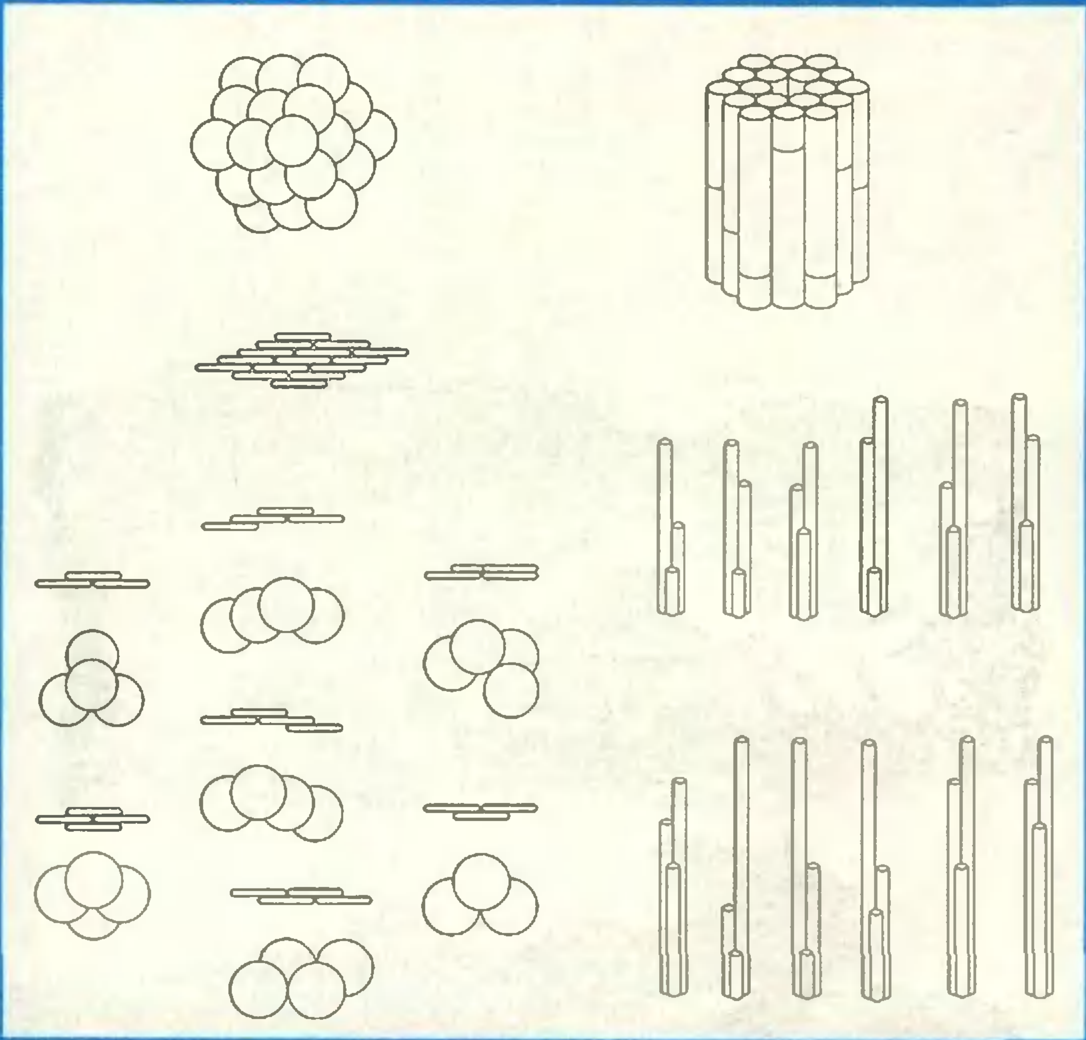
ISSN 0130-2221
1995·№2
МАРТ/АПРЕЛЬ

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК



ГОЛОВОЛОМКИ ИЗ СКЛЕЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ

Если вы уже имеете хорошую коллекцию головоломок и следите за нашими публикациями, то должны заметить, что мы выбираем не просто новые и оригинальные головоломки, а такие, которые легко сделать своими руками. На этой странице показаны две головоломки изобретателя из Ужгорода С. Грабарчука. Для их изготовления можно взять любые заготовки
илиндрической формы: от гвоздей и карандашей до пуговиц и монет. Мы не знаем, какой
риал вы выберете, поэтому на наших рисунках не приведены размеры деталей, да это и
твенно. Важно только сохранить правильные пропорции. Внешний вид головоломок
хху, а внизу нарисованы детали, из которых собираются игрушки.
ширить свою коллекцию? Советуем вам не ограничиваться покупкой или
стных головоломок. Изменяя количество цилиндров, пропорции элемен-
игрушки, вы можете придумать собственные конструкции. А мы всегда
льные разработки читателей в разделе «Коллекция головоломок».

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

МАРТ/АПРЕЛЬ · 1995 · №2

В номере:

К 100-ЛЕТИЮ НОРБЕРТА ВИНЕРА

О кибернетике, Винере и винеровском процессе

В.ТИХОМИРОВ

«Кибернетика (от греч. слова, означающего рулевой, управляющий) — реакционная лженаука, возникшая в США после Второй мировой войны и получившая широкое распространение и в других капиталистических странах... Кибернетика ярко выражает одну из основных черт буржуазного мировоззрения — его бесчеловечность, стремление превратить трудящихся в придаток машины, в орудие производства и войны. Вместе с тем для кибернетики характерна империалистическая утопия — заменить живого, мыслящего, борющегося за свои интересы человека машиной как на производстве, так и на войне».

Так было написано в кратком философском словаре (цитируется по четвертому изданию 1954 г.), и в течение нескольких лет этот словарь был единственным у нас источником сведений о новом научном направлении.

А отцом этой «реакционной лженауки» был американский ученый Норберт Винер. До выхода в свет книги «Кибернетика» (1948 г.) он был известен лишь математикам и инженерам, занимавшимся приложениями этой науки к теории связи.

Первым, кто употребил слово «кибернетика» как термин, относящийся к управлению в достаточно широком смысле, был древнегреческий мыслитель Платон (IV в. до н.э.). Затем Ампер (в прошлом веке) предложил так называть науку об управлении человеческим обществом. Винер использовал этот термин для названия науки об управлении и информационных связях в живом организме и разного рода машинах и автоматах.

Период совершенного отрицания кибернетики в нашей стране внезапно сменился ее необыкновенно восторженным признанием (хотя некоторые «крайние» кибернетические идеи многими все-таки воспринимались и поныне воспринимаются с враждебностью и неприятием).

Что же такое кибернетика, и в чем состоят ее «крайние идеи»?

Возможен и такой ответ: кибернетика — это научное воззрение, которое позволяет положительно ответить на следующие вопросы:

«Могут ли машины воспроизводить себе подобных и может ли в процессе самовоспроизведения происходить прогрессивная эволюция, приводящая к созданию машин, существенно более совершенных, чем исходные?

Могут ли машины испытывать эмоции: радоваться, грустить, быть недовольными чем-нибудь, чего-нибудь хотеть? Могут ли, наконец, машины ставить перед собой задачи, не поставленные перед ними конструкторами?»

Книга Н.Винера «Кибернетика» имела беспрецедентный, невиданный успех во всем мире. От внезапно открывающихся перспектив захватывало дух. Новому, необычному воззрению подвергались также основополагающие понятия, как Вселенная, мышление, да и сама жизнь. О мощи интеллектуального взрыва, произведенного винеровской «Кибернетикой» можно судить по впечатлению, какое она оказала на А.Н.Колмогорова.

Желая представить мысли Винера перед своими слушателями в наиболее острой форме, А.Н.Колмогоров задал те вопросы, что были мной процитированы выше, в своей лекции «Автоматы и жизнь», прочитанной в актовом зале Московского университета 6 августа 1961 года.

Идеология кибернетики была близка А.Н.Колмогорову. На заданные им вопросы он отвечал положительно. Более того, он считал реальным — и не в бесконечно удаленном будущем, а скоро — создать «новую жизнь, столь же высокоорганизованную, хотя может быть очень своеобразную и совсем не похожую на нашу».

Некоторые идеи, навеянные размышлениями о кибернетике, нашли в душе Андрея Николаевича глубокий, сокровенный отклик, о чем свидетельствуют, например, такие слова, адресованные совершенно незнакомому человеку[1]. «Так вот, я надеюсь, — писал Колмогоров, — что в моих кибернетических ... выступлениях... некоторая доля слушателей улавливает мировоззрение ГУМАНИЗМА, знающего непреходящую ценность человеческой культуры и знающего, что эта ценность не нуждается в подпорках веры в бессмертие, в «нематериальность» души, принципиальную иррациональность творчества и т.д.» (Для многих людей, с кем мне доводилось обсуждать эту тему, подобные воззрения оказывались неприемлемыми. Разумеется, они не совместимы с религиозными представлениями. Но и тем, кто не имел стойких религиозных убеждений, трудно было расстаться с иллюзиями относительно «принципиальной иррациональности творчества», скажем. Но ныне стали привычными интеллектуальные достижения компьютеров. Еще совсем недавно Каспаров самоуверенно утверждал, что машине никогда не победить его. Но он все-таки проиграл ей!)

Сейчас горячие споры о кибернетике, о том, «могут ли машины мыслить» и т.п. — давняя история, и многие, быть может, с некоторой иронией отнесутся к самим попыткам рассуждать на подобные темы. У большинства теперь иные заботы. А тогда, в конце пятидесятых — начале шестидесятых, вдруг пробился слабенький лучик надежды на то, что человечество изберет путь к мирному и счастливому братству, построенному на принципах, основанных на могуществе человеческого разума, соединенного с разумом машин... (Увы, особенно далеко в этом направлении дело не пошло.) Здесь, пожалуй, уместно будет сказать, что отношение к Винеру всегда было неоднозначным. Это относится и к его основному труду.

[1] *Из письма Колмогорова, обращенного к «многоуважаемому поэту мех-мата» (опубликовано в журнале «Новое литературное обозрение» № 6 (1994), с. 183 – 187).*

Многие математики восприняли его с большой долей скептицизма. Свидетельство тому — биографический очерк о Винере, помещенный в фундаментальной многотомной биографической энциклопедии ученых, принадлежащий перу известного голландского математика и математического беллетриста Ганса Фрейденталя. В нарушение всех принципов написания энциклопедических биографий, Фрейденталь заключает свой очерк словами: «Даже по меркам самого Винера «Кибернетика» — это плохо организованный труд. Он являет собой собрание опечаток, ошибочных математических утверждений, неправильных формул, блестящих, но бессвязных идей и логических абсурдов. Печально сознавать, что именно эта книга принесла Винеру наибольшую долю его общественной известности». (Справедливости ради надо сказать, что те же самые слова можно отнести ко многим книгам, оказавшим будоражащее воздействие на человечество.)

Математическое творчество Винера оказались тесно связанным с творчеством наших крупнейших математиков — А.Н.Колмогорова и И.М.Гельфанда. Винер заложил первый камень в основание теории марковских случайных процессов (см. последнюю часть этой статьи, где рассказывается о винеровском процессе), а общая теория марковских процессов была построена Колмогоровым. Замечательная теорема Винера из теории рядов Фурье (если непрерывная функция

$$x(t) = \sum_{k \in Z} x_k e^{ikt}$$

обладает тем свойством, что

$$\sum_{k \in Z} |x_k| < \infty ,$$

и нигде не обращается в нуль, то функция $x^{-1}(t)$ представима рядом

$$\sum_{k \in Z} y_k e^{ikt}$$

и при этом также

$$\sum_{k \in Z} |y_k| < \infty)$$

послужила одним из оснований для теории банаховских алгебр Гельфанда. (И теория марковских процессов, и теория банаховских алгебр — безусловные вершины математики XX века.)

Во время Второй мировой войны Винер занимался электрическими сетями, вычислительной техникой, теорией стрельбы. Разрабатывая системы упреждения для управления огнем зенитной артиллерии, Винер построил теорию прогнозирования случайных процессов, в значительной мере предвосхищенную Колмогоровым (его статьи на эти темы были опубликованы до войны в «Докладах» Французской академии наук. Винер отзывался о Колмогорове в своих книгах с необычайным почтением). В эти же годы начинаются его контакты с физиологами и медиками. Столь разностороннее и интенсивное творчество позволили Винеру в конце сороковых годов сформировать общую концепцию кибернетики, и это принесло ему невиданную для ученого популярность. Но и его вклад собственно в математику был очень значительным: почти каждый математик слышал о винеровском процессе, мере Винера, уравнении Винера — Хопфа. Параллельно с Банахом он разработал начала теории нормированных пространств, многое сделал в гармоническом анализе, теории потенциала, теории фильтрации случайных процессов.

...В начале шестидесятых годов Винер посетил Москву. Была объявлена его лекция в Политехническом музее. Мне позвонили и сказали, что Винер очень хотел бы встретиться с Колмогоровым. Попытки связаться с Андреем Николаевичем оказались неудачными, и меня попросили помочь в этом деле. Я поехал в Комаровку — подмосковную дачу, где значительную долю времени проводили Павел Сергеевич Александров (знаменитый математик, тополог, академик) и Андрей Николаевич Колмогоров. Я застал Колмогорова в Комаровке, передал просьбу Винера, но Андрей Николаевич уклонился от встречи.

В ту пору я был слишком молод, чтобы напрямую спросить о причинах отказа. Могу только высказать свои догадки. Возможно, Андрею Николаевичу не хотелось встречаться с Винером, ибо он опасался, что тот может избрать по отношению к нему несколько снисходительный, покровительственный тон, нередко свойственный знаменитостям. (В ученом мире Колмогоров занимал исключительно высокое положение, на которое Винер не мог претендовать. Но факт остается фактом: большинство наших соотечественников узнало о существовании ученого по имени Колмогоров именно из книг Винера. Это было досадно Андрею Николаевичу.)

А может быть, повлияло несколько ироническое отношение к Винеру со стороны Павла Сергеевича.

Нет ничего более прочного, чем юношеская репутация. Некогда в Геттинген — математическую Мекку того времени, — в город, в котором жил и творил величайший математический Пророк нашего века — Давид Гильберт, приехал юноша, с самых ранних лет погруженный в науку, росший без сверстников, веселых игр и забав, дружеских встреч и детских шалостей. Его воспитание оказалось неполноценным. Он то и дело совершал какие-то нелепые, смешные, неловкие поступки. О нем ходило множество анекдотов. Вот два, услышанных мною от П.С.Александрова.

... Как-то раз юному Винеру захотелось что-то обсудить с Нетер. (По поводу того, кто была самая выдающаяся женщина-математик, человечество разделилось: одни считают, что Эмми Нетер, остальные, — что наша Софья Ковалевская.) Фройляйн Нетер сказала: «Зайдите ко мне завтра часиков в шесть». И Винер пришел с визитом в шесть утра, разбудил хозяйку, испугал, она выбежала в ночной сорочке ... А бедный вундеркинд не мог и заподозрить (иначе, наверное, уточнил бы или спросил у кого-нибудь), что шесть часов в устах почтенной женщины — это, разумеется, шесть часов вечера!

А вот еще один очень широко известный рассказ. Он изложен в книге Констанс Рид «Гильберт»[2], но я повторю, как мне кажется, более артистичную версию П.С.Александрова.

Однажды Винер делал доклад на семинаре Гильберта. После доклада по традиции все спускались в небольшой подвальчик, где за кружкой пива продолжались научные и иные дискуссии. Вдруг туда «снизошел» сам Феликс Клейн — патриарх немецкой математики того времени. Он спросил Гильберта: «Как прошел доклад?» Гильберт стал отвечать в своей обычной монотонной манере: «В своей долгой математической жизни я прослушал огромное число самых разнообразных докладов. Были среди них блистательные и по содержанию и по форме. Были доклады великолепные по содержанию, но исключительно трудные для восприятия. Были докла-

[2] *М.: Наука, 1977, с. 220.*

ды прекрасные по форме, но весьма жалкие по содержанию. Были и такие, в которых нищета содержания дополнялась убожеством исполнения...» Все с нетерпением ждали развязки, а особенно — мальчик с горящими глазами, привыкший дома к обожанию и похвалам. И развязка наступила: «Но такого отвратительного доклада я не слышал никогда!»

Андрей Николаевич Колмогоров и Норберт Винер так и не встретились.

...Немного неожиданно для меня на лекцию Винера в Политехнический музей попасть оказалось совсем просто. При этом в зале (не очень-то и большом) было много свободных мест. (А на лекции Колмогорова «Автоматы и жизнь» был полностью забит актовый зал университета, имеющий 2000 мест, и когда в нем были заполнены все проходы, в зал перестали пускать. Для пришедших на лекцию едва хватило двух огромных аудиторий, которые срочно пришлось радиофицировать.) Почему так случилось — трудно сказать. Может быть, потому, что интерес к кибернетике начал уже спадать.

Собрание в Политехническом музее вел известный советский психолог — Александр Романович Лурия. Он тепло приветствовал Винера. Потом несколько добрых слов о госте сказал Израиль Моисеевич Гельфанд.

Перед своим докладом Винер ответил на приветствия. Это была очень достойная речь. Винер щедро воздал ученым нашей страны, поблагодарил председателя, отметил, что его личная творческая биография развивалась во многом параллельно биографии И.М.Гельфанда (банаховы алгебры, физика, биология и медицина). Потом сделал очень интересный и по форме и по содержанию доклад. (Так что сорок лет, прошедшие с того дня, когда Винер выступал на семинаре Гильберта, не прошли даром.) В конце докладчик весьма живо и интересно отвечал на вопросы.

Я сохранил самые теплые воспоминания о том дне. Винер произвел на меня глубокое впечатление — настоящего ученого и доброго и трогательного человека.

А теперь, в заключение, хочу сказать несколько слов о, быть может, самом значительном открытии Винера — винеровском процессе. Для этого придется совершить небольшой экскурс в прошлое.

В 1822 году знаменитый французский ученый Жан Батист Фурье выпустил в свет свой мемуар «Аналитическая теория тепла». Там были описаны процессы распространения тепла в различных средах. В однородном теплопроводящем стержне температура $u(t,x)$ (как функция координаты точки x и времени t) подчинялась уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}.$$

(Так уравнение теплопроводности обычно пишут математики. Обозначение $u(t,x)$ — также стандартно для них. Физики обозначают температуру буквой T и правую часть уравнения умножают на «размерностный» коэффициент $\frac{2K}{c\rho}$, где K — коэффициент теплопроводности, ρ — плотность, c — удельная теплоемкость.) Легко проверить, что функция $u_0(t,x)=(2\pi t)^{-1/2}e^{-x^2/2t}$ является решением уравнения теплопроводности. При этом, если t устремить к нулю, то эта функция будет все более и более «напоминать» так называемую δ-функцию Дирака (одного из создателей квантовой механики), который определял ее так: эта функция равна нулю всюду, кроме начала координат, где она равна бесконечности, а интеграл от нее равен единице (рис. 1). (Отметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(t,x)dx$$

действительно равен единице при любом $t>0$.)

Все это «на физическом уровне строгости» означает, что если безграничному (и расположенному вдоль оси x) стержню придать в начальный момент времени единичное количество теплоты (например, коснувшись его в начале координат очень тонкой раскаленной иглой), то в момент времени t в точке x температура стержня будет равна $u_0(t,x)$.

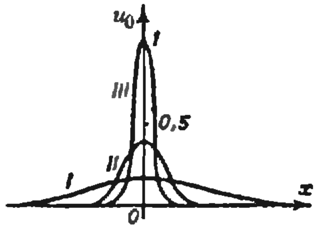


Рис. 1. Вид функции $u_0(t,x)$ для трех конкретных значений t: 6,25; 1; 0,16

Следующее имя на нашем пути — Альберт Эйнштейн. Время действия — 1905 год, — все тот же год, когда Эйнштейн опубликовал свой первый труд, посвященный теории относительности и заметку о теории квантов с объяснением фотоэффекта (за что в 1921 году был удостоен Нобелевской премии). Но помимо всего этого Эйнштейн в том же году сделал фундаментальный вклад в молекулярно-кинетическую теорию. О его работе, озаглавленной «О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, требуемом молекулярно-кинетической теорией теплоты», сейчас и пойдет речь. В ней Эйнштейн строит теорию хаотического, беспорядочного движения очень мелких (видимых лишь под микроскопом) взвешенных частиц в покоящейся жидкости. При этом Эйнштейн выводит уравнение для плотности числа частиц и обнаруживает, что оно в точности является уравнением теплопроводности.

Несколько позже к тем же идеям пришел замечательный польский физик Мариан Смолуховский. Он значительно продвинул вперед теорию Эйнштейна. Надо сказать также, что, отправляясь от исследований Эйнштейна, французский физик Жан Перрен дал независимое от других его опытов экспериментальное вычисление числа Авогадро — числа молекул в одном моле; оно оказалось примерно равным $6\cdot10^{23}$.

Это было одной из сенсаций того богатейшего научными событиями времени: экспериментально подтвердилась молекулярная теория строения вещества, удалось «взвесить» одну, «отдельно взятую» молекулу! За свои исследования Перрен был удостоен Нобелевской премии (1926 г.). Что же касается теоретического аспекта проблемы, то Эйнштейном подразумевалась такая модель процесса. Взвешенная частица в жидкости подвержена хаотическим столкновениям с молекулами жидкости, и именно потому она находится в беспрерывном хаотическом движении. (Впервые это явление было описано английским ботаником Броуном в 1827 году и получило название броуновского движения.) Дискретным аналогом процесса броуновского движения служит такое простейшее случайное блуждание по прямой. Частица изменяет свое положение только в дискретные моменты времени, кратные Δt. Если частица в какой-то момент времени находилась в точке x, то в следующий она переходит с равными вероятностями на Δx вправо или влево (независимо от предшествующего поведения). Теперь, если в качестве Δt выбрать число $1/n$, где n — достаточно велико, взять n частиц, «выпустить» их из начала координат блуждать независимо друг от друга, смещаясь на величину $\Delta x = \sqrt{\Delta t} = 2/\sqrt{n}$, то через n шагов (т.е. через единицу времени) число частиц, находящихся между точками с координатами x' и x'', будет примерно равно

$$\int_{x'}^{x''} (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2} dx .$$

Этот факт, известный еще со времен Лапласа, полностью соответствует результату Эйнштейна, если только «перейти к пределу» по n. Именно этот предельный переход и был совершен Винером.

Нарисуем несколько траекторий описанного случайного блуждания. Наиболее типичные траектории имеют очень «изломанный» вид. В пределе при n стремящемся к бесконечности получается непрерывное случайное блуждание. Оно-то и называется винеровским процессом. На рисунке 2 показаны три траектории винеровского процесса, получаемые дискретным моделированием. Винер придал точный смысл тому предельному переходу, о котором было сказано выше. «Реализациями» винеровского процесса оказались непрерывные, но очень

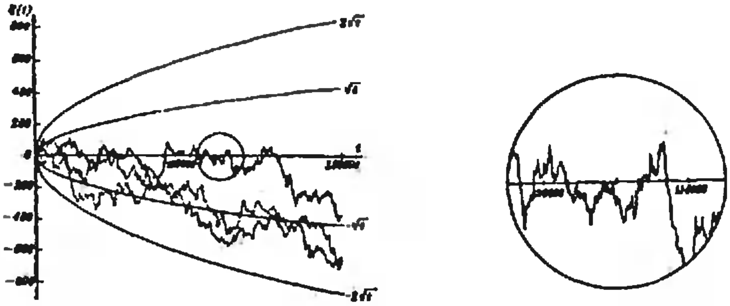


Рис. 2. Траектории трех броуновских частиц

«изломанные» нигде не дифференцируемые кривые. О подобном поведении броуновских частиц писал Перрен в своей книге «Атомы».

Именно описание броуновских траекторий Винер более всего ставил себе в заслугу. В своей автобиографии он пишет: «В фундаментальных работах Эйнштейна и Смолуховского... изучалось или поведение некоторой частицы в определенный момент времени, или же зависящие от времени статистические характеристики большой совокупности частиц. Математические же свойства траекторий отдельных частиц не затрагивались... Естественно было идеализировать броуновское движение, предположив молекулы бесконечно малыми, а столкновения происходящими непрерывно. Именно такое идеализированное броуновское движение я и изучал... В рамках этой теории мне удалось подтвердить замечание Перрена, показав, что за исключением множества случаев, имеющих суммарную вероятность нуль, все траектории броуновского движения являются непрерывными нигде не дифференцируемыми кривыми.» Таким образом в исследовании соединились изысканная математическая теория и объяснение явлений природы.

Остается сказать лишь, что начала общей теории марковских процессов, частным (хотя и важнейшим) примером которых служит винеровский процесс, были вскоре заложены Андреем Николаевичем Колмогоровым, и их общий вклад в этот раздел математической физики явился одним из крупнейших достижений науки нашего века. В нем воссоединились теория теплоты Фурье, центральная предельная теорема Лапласа и теория броуновского движения Эйнштейна и Смолуховского.

Страницы биографии Норберта Винера

В. НИКИФОРОВСКИЙ

Тех, кто создал новое направление в науке, мало. Еще меньше людей, создавших новые науки. Один из таких гигантов — Норберт Винер, которому в конце прошлого года исполнилось 100 лет. Его детище, кибернетика — наука об управлении и связях в машинах и живых организмах — родилось из сплава прежде не пересекавшихся математики и биологии, социологии, экономики. Чтобы не было недоговоренностей, скажем сразу же, что все разработанное Винером в этой области и многие его суждения были настолько необычными, противоречащими нашей господствующей идеологии, что в Советском Союзе кибернетику объявили лженаукой. Это привело к сильному отставанию от других стран в вычислительной технике и всех связанных с ней областях.

Бесспорен и вклад Винера в «чистую» математику.

Предметами его исследований выступали основания математики, математический анализ, теория вероятностей, вопросы спектрального синтеза, гармонический анализ, теория относительности и квантовая теория, теория потенциала, броуновское движение, теория электрических сетей, эргодические теоремы.

Винер — один из немногих ученых, которые сами подробно написали о себе. Он опубликовал две замечательные книги о своей жизни и творчестве — «Бывший вундеркинд» (1951) и «Я — математик» (1956); вторая переведена на русский язык и вышла в издательстве «Наука» в 1964 г. В книгах автор излагал также взгляды на развитие человечества, роль науки, ценность общения ученых.

Биография Винера менее всего похожа на биографию ученого-теоретика, проводящего жизнь в одном и том же рабочем кабинете.

Основатель кибернетики посетил многие страны, поддерживал знакомства почти со всеми знаменитыми учеными, сотрудничал или конкурировал с некоторыми из них, принимал участие в деятельности математических обществ, конгрессов, симпозиумов, длительное время читал лекции в различных университетах, в том числе и о своих открытиях. Во время I конгресса Международной федерации автоматического управления в 1960 г. он посетил Советский Союз, встречался с нашими учеными, читал лекции в Политехническом музее, давал интервью журналистам, провел беседу в журнале «Вопросы философии», в результате чего позже в нем была опубликована его статья «Наука и общество». Хотя Винер нередко заявлял о своей неуклюжести, при всех возможностях, а таких оказывалось достаточно, он предпринимал разнообразные путешествия — по горам, лесам, озерам.

Норберт Винер родился 26 ноября 1894 г. в г. Колумбия, штат Миссури, в еврейской семье. Отец его, Лео Винер, уроженец принадлежавшего раньше России Белостока, учился в Германии, затем переехал в США, стал филологом, заведовал кафедрой славянских языков и литературы Гарвардского университета в г. Кембридже, штат Массачусетс. Как упоминает Норберт в книге «Я — математик», отец знал около 40 языков, обладал огромными энергией и работоспособностью — однажды за два года перевел на английский язык двадцатичетырехтомное собрание сочинений Л.Н.Толстого. Естественно отношение его к сыну — стремление дать как можно больше знаний и выработать умений. В этом смысле Норберт в детстве и юности постоянно испытывал давление отца. А свое еврейское происхождение, о котором он узнал в возрасте 15 лет, обсуждал в биографической книге неоднократно.

Грамотой Норберт овладел к четырем годам. Отец заставлял его изучать древние и современные языки, учить математику: семи лет мальчик читал Дарвина, Данте, научные книги «библиотеки Гумбольдта». Постоянная занятость и увлечение наукой отделяли его от сверстников. Положение усугублялось острой близорукостью и врожденной неуклюжестью. В девять лет он поступил в среднюю школу, в которой начинали учиться дети 15 — 16 лет, закончив предварительно восьмилетку. Здесь барьер между ним и соучениками обозначился еще более, Норберт рос неуравновешенным вундеркиндом. Среднюю школу окончил, когда ему исполнилось одиннадцать; сразу же поступил в высшее учебное заведение, Тафтс-колледж; после окончания его, в возрасте 14 лет, получил степень бакалавра искусств; учился в Гарвардском и Корнеллском университетах, в 17 лет в Гарварде стал магистром искусств, в 18 — доктором философии по специальности «математическая логика».

Гарвардский университет выделил Винеру стипендию для учебы в Кембриджском (Англия) и Геттингенском (Германия) университетах. В Кембридже Винер слушал лекции Б.Рассела, участвовал в его семинаре, посещал рекомендуемые им лекции Г.Харди. После курса Б.Рассела Винер убедился в том, что нельзя заниматься философией математики, не зная глубоко эту науку. Лекции Харди увлекли Винера своей оригинальностью, направили его мысль на необходимость вести исследования по обоснованиям математики. На них он получил сведения об интеграле Лебега, что послужило материалом для его первых научных работ. Впоследствии Винер познакомился с другом и коллегой Харди — Дж.Литлвудом.

Перед Первой мировой войной, весной 1914 г., Винер переехал в Геттинген, где в университете учился у Э.Ландау и великого Д.Гильберта.

В начале войны Винер вернулся в США, год провел в Кембридже; в сложившихся условиях научных результатов добиться не мог. В Колумбийском университете он стал заниматься топологией, но начатое до конца не довел. В 1915 — 1916 учебном году Винер в должности ассистента преподавал математику в Гарвардском университете. Свои лекции он посвятил обоснованиям математики, следуя А.Н.Уайтхеду. На возникшие перед молодым лектором логические трудности обратил внимание Дж.Биркгоф.

Следующий учебный год Винер провел по найму в университете штата Мен. После вступления США в войну работал на заводе «Дженерал-электрик», откуда перешел в редакцию Американской энциклопедии в Олбани; какое-то время участвовал в составлении таблиц артиллерийских стрельб на полигоне, где его даже зачислили в армию, но вскоре из-за близорукости уволили. Затем он перебивался статьями в газеты, написал две работы по алгебре, вслед за опубликованием которых получил рекомендацию профессора математики В.Ф.Осгуда и в 1919 г. поступил на должность ассистента кафедры математики Массачусетсского технологического института (МТИ). Так началась его служба в этом институте, продолжавшаяся всю жизнь.

Здесь Винер ознакомился с содержанием статистической механики У.Гиббса. Ему удалось связать основные положения ее с лебеговским интегрированием при изучении броуновского движения и написать несколько статей. Такой же подход оказался возможным в установлении сущности дробового эффекта в связи с прохождением электрического тока по проводам или через электронные лампы. Этому посвящена написанная Винером еще летом 1920 г. статья. Также впоследствии оказались полезными работы Винера для инженеров-электриков. В Европе с пониманием приняли его исследования М.Фреше, П.Леви, Дж.И.Тейлор, Г.Харди.

Осенью 1920 г. состоялся Международный математический конгресс в Страсбурге. Винер решил прибыть в Европу пораньше, чтобы познакомиться и поработать с некоторыми математиками. Случай заставил его задержаться во Франции — пароход, на котором он плыл, наскочил кормой на скалу и получил большую пробоину. Команде удалось пришвартоваться в Гавре.

Во Франции Винер встретился с Фреше; после бесед с ним заинтересовался обобщением векторных пространств. Фреше не сразу оценил результат, полученный молодым ученым, но через несколько месяцев, прочитав в польском математическом журнале публикацию Ст.Банаха на ту же тему, изменил мнение. Некоторое время такие пространства назывались пространствами Банаха–Винера.

На конгрессе в Страсбурге Винер познакомился с выдающимися математиками, в том числе Ж.Адамаром и К.Жорданом.

Возвратившись в США, он усиленно занимается наукой; в 1920 — 1925 гг. решает физические и технические задачи с помощью абстрактной математики и находит новые закономерности в теории броуновского движения, теории потенциала, гармоническом анализе. Когда Винер занимался теорией потенциала, в «Докладах» Французской академии наук печатались аналогичные материалы А.Лебега и его ученика Ж.Л.Булигана. Винер написал работу и послал Лебегу для направления в «Доклады». Булиган также оформил статью. Обе заметки вышли в одном номере журнала с предисловием Лебега. Булиган признал превосходство работы Винера и пригласил его к себе. Это было второе выигранное Винером соревнование; в первом он опередил двух докторантов профессора Гарвардского университета О.Д.Келлога в исследовании потенциала.

В 1922, 1924 и 1925 гг. Винер побывал в Европе у знакомых и родственников семьи. В 1925 г. он выступил в Геттингене с сообщением о своих работах по обобщенному гармоническому анализу, заинтересовавшим Гильберта, Куранта и М.Борна. Впоследствии Винер понял, что его результаты в некоторой степени связаны с развивавшейся в то время квантовой теорией.

Тогда же Винер познакомился с одним из конструкторов вычислительных машин — В.Бушем и высказал пришедшую ему однажды в голову идею нового гармонического анализатора. Буш претворил ее в жизнь.

Наступило время Винеру решительно выступить против гнета отца, который он ощущал все годы, чувствуя себя свободным только во время заграничных поездок и занятий в МТИ. Он познакомился с Маргарет Энгеман из немецкой семьи и решил жениться на ней; свадьба состоялась весной 1926 г., перед поездкой Винера в Геттинген. Супруги совершили путешествие по Европе, во время которого Винер встречался с математиками. В Дюссельдорфе он сделал доклад на съезде Немецкой лиги содействия науке, после которого познакомился с Р.Шмидтом, ведущим исследования в области тауберовых теорем. Шмидт обратил внимание на применение общей тауберовой теоремы к задаче о распределении простых чисел. Винер тогда же получил значительные результаты в этой области. Во время пребывания в Копенгагене он познакомился с Х.Бором. По дороге в США супруги побывали в Лондоне, где Винер встречался с Харди.

В 1926 г. в Массачусетсский технологический институт приехал работать Д.Я.Стройк. После возвращения из Европы Винер вместе с ним занялся применением идей дифференциальной геометрии к дифференциальным уравнениям, в том числе к уравнению Шредингера. Работа увенчалась успехом.

Винер был убежден, что умственный труд «изнашивает человека до предела», поэтому должен чередоваться с физическим отдыхом. Он всегда пользовался всякой возможностью совершать прогулки, плавал, играл в различные игры, с удовольствием общался с нематематиками.

Супруги купили дом в сельской местности, в 1927 г. у них родилась старшая дочь — Барбара, забот прибавилось.

Продвижение Винера по службе шло медленно, жизненные условия давали о себе знать. Он пытался получить приличное место в других странах, не вышло. Думается, что материальные затруднения семьи Винера не идут в сравнение с теми, которые испытывало и испытывает большинство интеллигенции у нас. Но все же автомашину подарил сыну Лео Винер.

Однако пришла пора и некоторого жизненного везения. На заседании Американского математического общества Винер встретился с Я.Д.Тамаркиным, геттингенским знакомым, всегда высоко отзывавшимся о его работах. Такую же поддержку оказывал ему неоднократно приезжавший в США Харди. И это повлияло на положение Винера: благодаря Тамаркину и Харди он стал известен в Америке.

Разразившаяся Великая депрессия повлияла на состояние науки в стране. Многие ученые больше интересовались биржей, чем своими непосредственными делами. Винер, у которого к тому времени было уже двое детей, тем не менее твердо верил, что его назначение «заниматься наукой самому и приобщать к самостоятельной научной работе одаренных учеников». Под его руководством защищались докторские диссертации. Особо он отмечал китайца Юк Винг Ли и японца Шикао Икехара. Ли сотрудничал с Бушем в области электротехники и стал осуществлять на практике пришедшую Винеру идею нового прибора для электрических цепей. Прибор удалось создать и впоследствии запатентовать. С тех пор Ли продолжительное время сотрудничал с Винером. Икехара усовершенствовал найденные Винером методы в теории простых чисел. Тогда же Винер встречался с Бушем и обсуждал с ним принципиальное устройство машины Буша. У него сложились основные идеи цифровых вычислительных машин, построенных значительно позже. Буш задумал издать книгу по электрическим цепям, консультировался с Винером по некоторым вопросам и попросил его написать о методе Фурье.

Особо значимой оказалась совместная деятельность Винера с приехавшим из Германии в Гарвардский университет Э.Хопфом, в результате чего в науку вошло «уравнение Винера–Хопфа», описывающее радиационные равновесия звезд, а также относящееся к другим задачам, в которых ведется речь о двух различных режимах, отделенных границей.

В 1929 г. в шведском журнале «Акта математика» и американском «Анналы математики» вышли две большие итоговые статьи Винера по обобщенному гармоническому анализу.

С 1932 г. Винер — профессор МТИ. Институт выделил ему достаточные средства для поездки на математический конгресс в Цюрих. Он отправился всей семьей. В Кембридже встретился с Харди и Литлвудом. Харди предложил ему прочитать в университете курс лекций об интеграле Фурье и написать на эту тему книгу. Поступили предложения читать лекции также в Гамбурге, Праге. В Праге он и Маргарет побывали у друга отца — президента Масарика.

На конгрессе в Цюрихе Винер встретился с двоюродным братом отца — Л.Лихтенштейном и Р.Пэли, собиравшимся приехать осенью в США, чтобы поработать с ним. Хотя для Пэли был чужд прикладной подход Винера к математике, они успешно сотрудничали. В 1934 г. вышла монография Винера и Пэли «Преобразование

Фурье в комплексной области». Увы, Пэли не увидел этой книги — по нелепой случайности он погиб в апреле 1933 г.

В Гарварде Винер познакомился с физиологом А.Розенблютом и стал посещать его методологический семинар, объединявший представителей различных наук. Этот семинар сыграл важную роль в формировании у Винера идей кибернетики. После отъезда Розенблюта в Мехико заседания семинара проводились иногда в Мехико, иногда в МТИ.

Тогда же Винера пригласили принять участие в деятельности Национальной академии наук. Ознакомившись с царившими там порядками, интриганством, он покинул ее. В Математическом обществе по-прежнему активно работал: в 1935 — 1936 гг. был его вице-президентом; ему присуждена престижная премия общества за работы по анализу.

В 1934 г. Винер получил приглашение из университета Цинхуа (в Пекине) прочитать курс лекций по математике и электротехнике. Инициатором этого был Ли, работавший в университете. Винер с семьей поехал через Японию в Китай; в Токио его встречал Икехара. Одновременно он работал с Ли по совершенствованию аналоговой вычислительной машины Буша. При возвращении решено было попасть на Международный математический конгресс в Осло. Во время длительного путешествия по океанам и морям Винер, воспользовавшись вынужденным досугом, написал роман «Искуситель» о судьбе одного изобретателя (опубликован в 1959 г.). Год посещения Китая он считал годом полного становления его как ученого.

Выше отмечалось, что во время войны Винер почти целиком посвятил свое творчество военным делам. Его занимали вопросы конструирования вычислительных машин. В отличие от аналоговой машины Буша, у него возникла идея цифровой машины. Она должна была оперировать двоичной системой счисления, иметь память, в конструкции следовало применить электронные лампы, ввод и вывод данных осуществлять с помощью магнитной ленты. Свои соображения Винер сообщил Бушу. Тот сказал, что реализовать их время еще не пришло. Но в 1944 г. Винер увидел изготовленную под руководством Г.Эйкена первую вычислительную машину с программным управлением и убедился в правильности своих построений. Однако его удивило, что в ней использовались механические, а не электронные реле, способные увеличить скорость вычислений.

Тогда Винер обратился к задаче прогнозирования полета самолетов для нужд зенитной артиллерии. К нему присоединился работавший в МТИ инженер Д.Байглоу. Обдумывание и экспериментирование убедили их в том, что система управления огнем зенитной артиллерии должна быть системой с обратной связью, что обратная связь играет существенную роль и в человеческом организме.

Итогом предварительных изысканий стала написанная Винером книга, посвященная временным рядам, интерполяции и экстраполяции. (Она издана фотографическим способом и за цвет суперобложки получила название «Желтой опасности». Книгой пользовались специалисты по управлению огнем зенитной артиллерии, а также после войны специалисты в области следящих систем и систем связи.) Обобщения распространялись вширь и вглубь. Становилось ясной необходимость статистического подхода, возможность охватить одними и теми же закономерностями теорию связи, экономику, метеорологию, статистическую механику, социологию, применить их к изучению нервной системы человека.

Винер собрал в Принстоне семинар из инженеров связи, нейрофизиологов, специалистов по вычислительной технике. Участники семинара сочли подходящим слово «память» для хранения информации, которой успешно занимался учившийся ранее в МТИ К.Шеннон; термин «обратная связь» нашли применимым не только в машинах, но и живых организмах; утвердили в качестве единицы информации «бит» («двоичную единицу»). Таким образом, семинар в Принстоне дал начало новой науке, для которой еще не было придумано названия. В 1943 г. вышла статья А.Розенблюта, Н.Винера, Д.Байглоу «Поведение, целенаправленность и телеология», представляющая собой набросок кибернетического метода. Весной 1944 г. Винер участвовал в работе съезда Мексиканского математического общества. А летом 1946 г. Винер получил приглашение во Францию, на конференцию по гармоническому анализу. В Париже он встретился с издателем Фрейманом, попросившим его написать брошюру о теории обратной связи, заводах-автоматах, нервной системе. Винер согласился.

После возвращения с конференции уехал в Мексику и около года у Розенблютов работал над заказанной книгой, обсуждая написанное со знакомыми. Сразу же возникла трудность с заглавием — необычно было содержание. Требовалось найти слово, связанное с управлением, регулированием. Пришло на ум греческое, похожее на «рулевой», что по-английски звучит как «кибернетика». Так и осталось. Фрейман невысоко оценил коммерческое будущее книги. Готовую рукопись Винер показал издательству МТИ и получил заказ на ее выпуск, и в 1948 г. она вышла с многочисленными опечатками и огрехами, поскольку Винер из-за болезни глаз не мог править корректуру, а его помощники отнеслись к делу недобросовестно.

Несмотря на неряшливое оформление «Кибернетика» вскоре стала научным бестселлером и сделала автора знаменитым. На него посыпались заказы писать статьи и читать лекции.

Все годы после выхода «Кибернетики» Винер пропагандировал ее идеи. В 1950 г. вышло продолжение — «Человеческое использование человеческих существ» (русское издание — «Кибернетика и общество», 1958), в 1958 г. — «Нелинейные задачи в теории случайных процессов», в 1961 г. — второе издание «Кибернетики», в 1963 г. — своеобразное кибернетическое сочинение «Акционерное общество Бог и Голем» (русское издание — «Творец и робот», 1966).

В последние годы пытливый ум Винера проник в биологию, нейрологию, электроэнцефалографию, генетику.

В 1963 г. Винера наградили Национальной медалью — высшим знаком для ученых.

Умер Норберт Винер 18 марта 1964 г. Было ему 69 лет.

Загадки Винера — может ли вычислительная машина производить себе подобных? кто умнее, человек или машина? — до сих пор будоражат специалистов. Но, как говорил он сам: «Отдайте же человеку — человеческое, а вычислительной машине — машинное».


Тишков

Простой вывод формулы $E = mc^2$

Б. БОЛОТОВСКИЙ

В 1995 году исполняется 90 лет с того дня, как была создана специальная теория относительности. За прошедшие годы следствия этой теории нашли подтверждение во многих опытах, и сегодня она является основой для понимания широчайшего круга явлений. Речь идет не только о качественном понимании, так сказать, о понимании без формул, хотя само по себе и такое понимание физических явлений очень важно. Теория относительности дает и точное количественное описание физических явлений, служит основой для расчета различных физических приборов и установок.

Введение

Полная и окончательная формулировка современной теории относительности содержится в большой статье Альберта Эйнштейна, опубликованной в 1905 году. Если говорить об истории создания теории относительности, то у Эйнштейна были предшественники. Отдельные важные вопросы теории исследовались в работах Х.Лоренца, Дж.Лармора, А.Пуанкаре, а также некоторых других физиков. Однако теория относительности как физическая теория до появления работы Эйнштейна не существовала. Работа Эйнштейна отличается от предшествующих работ совершенно новым пониманием как отдельных сторон теории, так и всей теории как целого, таким пониманием, которого не было в работах его предшественников.

Теория относительности заставила пересмотреть многие основные представления физики. Относительность одновременности событий, различия в ходе движущихся и покоящихся часов, в длине движущейся и покоящейся линейки — эти и многие другие следствия теории относительности неразрывно связаны с новыми по сравнению с ньютоновской механикой представлениями о пространстве и времени, а также о взаимной связи пространства и времени.

Одно из важнейших следствий теории относительности — знаменитое соотношение Эйнштейна между массой m покоящегося тела и запасом энергии E в этом теле:

$$E = mc^2. \qquad (1)$$

где c — скорость света.

Это соотношение называют по-разному. На Западе для него принято название «соотношение эквивалентности между массой и энергией». У нас долгое время было принято более осторожное название «соотношение взаимосвязи между массой и энергией». Сторонники этого более осторожного названия избегают слова «эквивалентность», тождественность, потому что, говорят они, масса и энергия — это разные качества вещества, они могут быть связаны между собой, но не тождественны, не эквивалентны. Мне кажется, что эта осторожность является излишней. Равенство $E = mc^2$ говорит само за себя. Из него следует, что массу можно измерять в единицах энергии, а энергию — в единицах массы. Кстати, так физики и поступают. А утверждение, что масса и энергия — это разные характеристики вещества, было справедливо в механике Ньютона, а в механике Эйнштейна само соотношение $E = mc^2$ говорит о тождественности этих двух величин — массы и энергии. Можно, конечно, сказать, что соотношение между массой и энергией не означает их тождественности. Но это все равно, что сказать, глядя на равенство 2=2: это не тождество, а соотношение между разными двойками, потому что справа стоит правая двойка, а слева — левая.

Соотношение (1) обычно выводится из уравнения движения тела в эйнштейновской механике, но этот вывод достаточно труден для ученика средней школы. Поэтому имеет смысл попытаться найти простой вывод этой формулы.

Сам А.Эйнштейн, сформулировав в 1905 году основы теории относительности в большой статье «К электродинамике движущихся тел», затем вернулся к вопросу о соотношении между массой и энергией. В том же 1905 году он опубликовал короткую заметку «Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии?». В этой статье он дал вывод соотношения $E = mc^2$, который опирается не на уравнение движения, а, как и приведенный ниже вывод, на эффект Доплера. Но этот вывод тоже довольно сложный.

Вывод формулы $E = mc^2$, который мы хотим вам предложить, не основан на уравнении движения и, кроме того, является достаточно простым, так что школьники старших классов могут его одолеть — для этого почти не потребуется знаний, выходящих за пределы школьной программы. На всякий случай мы приведем все сведения, которые нам понадобятся. Это сведения об эффекте Доплера и о фотоне — частице электромагнитного поля. Но предварительно оговорим одно условие, которое будем считать выполненным и на которое будем опираться при выводе.

Условие малости скоростей

Мы будем предполагать, что тело массой m, с которым мы будем иметь дело, либо покоится (и тогда, очевидно, скорость его равна нулю), либо, если оно движется, то со скоростью v, малой по сравнению со скоростью света c. Иными словами, мы будем предполагать, что отношение v/c скорости тела к скорости света есть величина малая по сравнению с единицей. Однако мы будем считать отношение v/c хотя и малой, но не пренебрежимо малой величиной. Мы будем учитывать величины, пропорциональные первой степени отношения v/c, но будем пренебрегать вторыми и более высокими степенями этого отношения. Например, если при выводе нам придется иметь дело с выражением $1 - v^2/c^2$, мы будем пренебрегать величиной v^2/c^2 по сравнению с единицей:

$$1 - \frac{v^2}{c^2} \approx 1 \quad \left(\frac{v^2}{c^2} \ll \frac{v}{c} \ll 1\right). \qquad (2)$$

В этом приближении получаются соотношения, которые на первый взгляд могут показаться странными, хотя ничего странного в них нет, надо только помнить, что соотношения эти не являются точными равенствами, а справедливы с точностью до v/c включительно, величинами же порядка v^2/c^2 мы пренебрегаем. В таком предположении справедливо, например, следующее приближенное равенство:

$$\frac{1}{1-\frac{v}{c}} \approx 1+\frac{v}{c} \quad \left(\frac{v^2}{c^2} \ll 1\right). \qquad (3)$$

Действительно, умножим обе части этого приближенного равенства на $1-v/c$. Мы получим

$$1 \approx 1-\frac{v^2}{c^2},$$

т.е. приближенное равенство (2). Поскольку мы считаем, что величина v^2/c^2 пренебрежимо мала в сравнении с единицей, мы видим, что в приближении $v^2/c^2 \ll 1$ равенство (3) справедливо. Аналогично, нетрудно доказать в том же приближении равенство

$$\frac{1}{1+\frac{v}{c}} \approx 1-\frac{v}{c}. \qquad (4)$$

Чем меньше величина v/c, тем точнее эти приближенные равенства.

Мы не случайно будем использовать приближение малых скоростей. Нередко приходится слышать и читать, что теория относительности должна применяться в случае больших скоростей, когда отношение скорости тела к скорости света имеет порядок единицы, при малых же скоростях применима механика Ньютона. На самом деле теория относительности не сводится к механике Ньютона даже в случае сколь угодно малых скоростей. Мы это увидим, доказав соотношение $E = mc^2$ для покоящегося или очень медленно движущегося тела. Механика Ньютона такого соотношения дать не может.

Оговорив малость скоростей по сравнению со скоростью света, перейдем к изложению некоторых сведений, которые понадобятся нам при выводе формулы $E = mc^2$.

Эффект Доплера

Мы начнем с явления, которое называется по имени австрийского физика Кристиана Доплера, открывшего это явление в середине прошлого века.

Рассмотрим источник света, причем будем считать, что источник движется вдоль оси X со скоростью v. Предположим для простоты, что в момент времени $t = 0$ источник проходит через начало координат, т.е. через точку $x = 0$. Тогда положение источника в любой момент времени t определяется формулой

$$x = vt.$$

Предположим, что далеко впереди излучающего тела на оси X помещен наблюдатель, который следит за движением тела. Ясно, что при таком расположении тело приближается к наблюдателю. Предположим, что наблюдатель взглянул на тело в момент времени t. В этот момент до наблюдателя доходит световой сигнал, излученный телом в более ранний момент времени t'. Очевидно, момент излучения должен предшествовать моменту приема, т.е. должно быть $t' < t$.

Определим связь между временем излучения t' и временем приема t. В момент излучения t' тело находится в точке $x' = vt'$, а наблюдатель пусть находится в точке $x = L$. Тогда расстояние от точки излучения до точки приема равно $L - vt'$, а время, за которое свет пройдет такое расстояние, равно $(L - vt')/c$. Зная это, мы легко можем записать уравнение, связывающее t' и t:

$$t = t' + \frac{L - vt'}{c}.$$

Отсюда

$$t' = \frac{t - L/c}{1 - v/c}. \qquad (5)$$

Таким образом, наблюдатель, глядя на движущееся тело в момент времени t, видит это тело там, где оно находилось в более ранний момент времени t', причем связь между t и t' определяется формулой (5).

Предположим теперь, что яркость источника периодически меняется по закону косинуса. Обозначим яркость буквой I. Очевидно, I есть функция времени, и мы можем, учитывая это обстоятельство, записать

$$I = I(t) = I_0 + I_1 \cos\omega t \quad (I_0 > I_1 > 0),$$

где I_0 и I_1 — некоторые постоянные, не зависящие от времени. Неравенство в скобках необходимо потому, что яркость I не может быть отрицательной величиной. Но для нас в данном случае это обстоятельство не имеет никакого значения, поскольку нас в дальнейшем будет интересовать только переменная составляющая — второе слагаемое в формуле для $I(t)$.

Пусть наблюдатель смотрит на тело в момент времени t. Как уже было сказано, он видит тело в состоянии, соответствующем более раннему моменту времени t'. Переменная часть яркости в момент t' пропорциональна $\cos\omega t'$. С учетом соотношения (5), получаем

$$\cos\omega t' = \cos\omega\frac{t - L/c}{1 - v/c} = \cos\left(\frac{\omega t}{1 - v/c} - \omega\frac{L}{c}\frac{1}{1 - v/c}\right).$$

Коэффициент при t под знаком косинуса дает частоту изменения яркости, как ее видит наблюдатель. Обозначим эту частоту через ω'. Тогда

$$\omega' = \frac{\omega}{1 - v/c}. \qquad (6)$$

Если источник покоится ($v = 0$), то $\omega' = \omega$, т.е. наблюдатель воспринимает ту же самую частоту, что излучается источником. Если же источник движется к наблюдателю (в этом случае наблюдатель принимает излучение, направленное вперед по движению источника), то принимаемая частота ω' отличается от излучаемой частоты ω, причем принимаемая частота больше излучаемой.

Случай, когда источник движется от наблюдателя, можно получить, изменив знак перед v в соотношении (6). Видно, что тогда принимаемая частота оказывается меньше излучаемой.

Можно сказать, что вперед излучаются большие частоты, а назад — малые (если источник удаляется от наблюдателя, то наблюдатель, очевидно, принимает излучение, испущенное назад).

В несовпадении частоты колебаний источника и частоты, принимаемой наблюдателем, и состоит эффект Доплера. Если наблюдатель находится в системе координат, в которой источник покоится, то излучаемая и принимаемая частоты совпадают. Если же наблюдатель находится в системе координат, в которой источник движется со скоростью v, то связь излучаемой и принимаемой частот определяется формулой (6). При этом мы предполагаем, что наблюдатель всегда покоится.

Как видно, связь между излучаемой и принимаемой частотами определяется скоростью v относительного движения источника и наблюдателя. В этом смысле безразлично, кто движется — источник приближается к наблюдателю или наблюдатель к источнику. Но нам в дальнейшем удобнее будет считать, что наблюдатель покоится.

Строго говоря, в разных системах координат время течет по-разному. Изменение хода времени также сказывается на величине наблюдаемой частоты. Если, например, частота колебаний маятника в системе координат, где он покоится, равна ω, то в системе координат, где он движется со скоростью v, частота равна $\omega\sqrt{1-v^2/c^2}$. К такому результату приводит теория относительности. Но поскольку мы с самого начала условились пренебрегать величиной v^2/c^2 по сравнению с единицей, то изменение хода времени для нашего случая (движение с малой скоростью) пренебрежимо мало.

Таким образом, наблюдение за движущимся телом имеет свои особенности. Наблюдатель видит тело не там, где оно находится (пока сигнал идет к наблюдателю, тело успевает переместиться), и принимает сигнал, частота которого ω' отличается от излучаемой частоты ω.

Выпишем теперь окончательные формулы, которые понадобятся нам в дальнейшем. Если движущийся источник излучает вперед по направлению движения, то частота ω', принятая наблюдателем, связана с частотой источника ω соотношением

$$\omega' = \frac{\omega}{1-v/c} = \omega\left(1+\frac{v}{c}\right) \qquad \frac{v}{c} \ll 1. \qquad (7)$$

Для излучения назад имеем

$$\omega' = \frac{\omega}{1+v/c} = \omega\left(1-\frac{v}{c}\right) \qquad \frac{v}{c} \ll 1. \qquad (8)$$

Энергия и импульс фотона

Современное представление о частице электромагнитного поля — фотоне, как и формула $E = mc^2$, которую мы собираемся доказать, принадлежит Эйнштейну и было высказано им в том же 1905 году, в котором он доказал эквивалентность массы и энергии. Согласно Эйнштейну, электромагнитные и, в частности, световые волны состоят из отдельных частиц — фотонов. Если рассматривается свет некоторой определенной частоты ω, то каждый фотон имеет энергию E, пропорциональную этой частоте:

$$E = \hbar\omega.$$

Коэффициент пропорциональности $\hbar$ называется постоянной Планка. По порядку величины постоянная Планка равна 10^{-34}, размерность ее Дж$\cdot$с. Мы здесь не выписываем точного значения постоянной Планка, оно нам не понадобится.

Иногда вместо слова «фотон» говорят «квант электромагнитного поля».

Фотон имеет не только энергию, но и импульс, равный

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{E}{c}.$$

Этих сведений нам для дальнейшего будет достаточно.

Вывод формулы $E=mc^2$

Рассмотрим покоящееся тело массой m. Предположим, что это тело одновременно излучает два фотона в прямо противоположных направлениях. Оба фотона имеют одинаковые частоты ω и, значит, одинаковые энергии $E = \hbar\omega$, а также равные по величине и противоположные по направлению импульсы. В результате излучения тело теряет энергию

$$\Delta E = 2\hbar\omega. \qquad (9)$$

Потеря импульса равна нулю, и, следовательно, тело после излучения двух квантов остается в покое.

Этот мысленный опыт представлен на рисунке 1. Тело изображено кружком, а фотоны — волнистыми линиями. Один из фотонов излучается в положительном направлении оси X, другой — в отрицательном. Около волнистых линий приведены значения энергии и импульса соответствующих фотонов. Видно, что сумма излученных импульсов равна нулю.

Рассмотрим теперь ту же картину с точки зрения наблюдателя, который движется по оси X влево (т.е. в отрицательном направлении оси X) с малой скоростью v. Такой наблюдатель увидит уже не покоящееся тело, а тело, движущееся с малой скоростью вправо. Величина этой скорости равна v, и

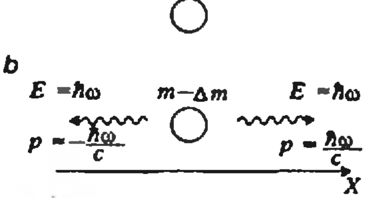


Рис. 1. Картина двух фотонов в системе отсчета, в которой излучающее тело покоится. а) Тело до излучения; б) после излучения

направлена скорость в положительном направлении оси X. Тогда частота, излучаемая вправо, будет определяться формулой (7) для случая излучения вперед:

$$\omega' = \omega\left(1+\frac{v}{c}\right).$$

Мы частоту фотона, излучаемого движущимся телом вперед по направлению движения, обозначили через ω', чтобы не спутать эту частоту с частотой ω излучаемого фотона в той системе координат, где тело покоится. Соответственно, частота фотона, излучаемого движущимся телом влево, определяется формулой (8) для случая излучения назад:

$$\omega'' = \omega\left(1-\frac{v}{c}\right).$$

Чтобы не перепутать излучение вперед и излучение назад, мы будем величины, относящиеся к излучению назад, обозначать двумя штрихами.

Поскольку, из-за эффекта Доплера, частоты излучения вперед и назад различны, энергия и импульс у излученных квантов также будут различаться. Квант, излученный вперед, будет иметь энергию

$$E' = \hbar\omega' = \hbar\omega\left(1+\frac{v}{c}\right)$$

и импульс

$$p' = \frac{\hbar\omega'}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}\left(1+\frac{v}{c}\right).$$

Квант, излученный назад, будет иметь энергию

$$E'' = \hbar\omega'' = \hbar\omega\left(1-\frac{v}{c}\right)$$

и импульс

$$p'' = \frac{\hbar\omega''}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}\left(1-\frac{v}{c}\right).$$

При этом импульсы квантов направлены в противоположные стороны.

Картина процесса излучения, каким его видит движущийся наблюдатель, изображена на рисунке 2.

Важно здесь подчеркнуть, что на рисунках 1 и 2 изображен один и тот же процесс, но с точки зрения разных наблюдателей. Первый рисунок относится к случаю, когда наблюдатель покоится относительно излучающего тела, а второй — когда наблюдатель движется.

Подсчитаем баланс энергии и импульса для второго случая. Потеря энергии в системе координат, где излучатель имеет скорость v, равна

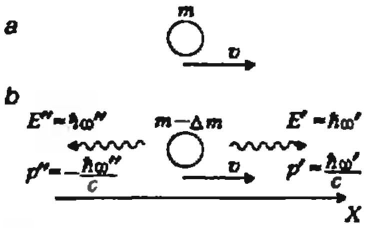


Рис. 2. Картина двух фотонов в системе отсчета, где скорость излучающего тела равна v. а) Тело до излучения; б) после излучения

$$\Delta E' = E' + E'' =$$
$$= \hbar\omega\left(1 + \frac{v}{c}\right) + \hbar\omega\left(1 - \frac{v}{c}\right) =$$
$$= 2\hbar\omega = \Delta E,$$

т.е. она такая же, что и в системе, где излучатель покоится (см. формулу (9)). Но потеря импульса в системе, где излучатель движется, не равна нулю, в отличие от системы покоя:

$$\Delta p' = p' - p'' =$$
$$= \frac{\hbar\omega}{c}\left(1 + \frac{v}{c}\right) - \frac{\hbar\omega}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right) =$$
$$= \frac{2\hbar\omega}{c}\frac{v}{c} = \frac{\Delta E}{c^2}v. \quad (10)$$

Движущийся излучатель теряет импульс $\Delta Ev/c^2$ и, следовательно, должен, казалось бы, тормозиться, уменьшать свою скорость. Но в системе покоя излучение симметрично, излучатель не меняет скорости. Значит, скорость излучателя не может измениться и в той системе, где он движется. А если скорость тела не меняется, то как оно может потерять импульс?

Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним, как записывается импульс тела массой m:

$$p = mv$$

– импульс равен произведению массы тела на его скорость. Если скорость тела не меняется, то его импульс может измениться только за счет изменения массы:

$$\Delta p = \Delta m v.$$

Здесь Δp – изменение импульса тела при неизменной скорости, Δm – изменение его массы.

Это выражение для потери импульса надо приравнять к выражению (10), которое связывает потерю импульса с потерей энергии. Мы получим формулу

$$\frac{\Delta E}{c^2}v = \Delta m v,$$

или

$$\Delta E = \Delta m c^2,$$

которая означает, что изменение энергии тела влечет за собой пропорциональное изменение его массы. Отсюда легко получить соотношение между полной массой тела и полным запасом энергии:

$$E = mc^2.$$

Открытие этой формулы явилось огромным шагом вперед в понимании природных явлений. Само по себе осознание эквивалентности массы и энергии есть великое достижение. Но полученная формула, помимо того, имеет широчайшее поле применений. Распад и слияние атомных ядер, рождение и распад частиц, превращения элементарных частиц одна в другую и множество других явлений требуют для своего объяснения учета формулы связи между массой и энергией.

В заключение – два домашних задания для любителей теории относительности.

1. Прочитайте статью А.Эйнштейна «Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии?» (например, в первом томе собрания научных трудов А.Эйнштейна, вышедшем в издательстве «Наука» в 1965 г.).

2. Попробуйте самостоятельно вывести соотношение $\Delta m = \Delta E/c^2$ для случая системы отсчета, скорость которой v может быть не малой по сравнению со скоростью света c. *Указание.* Используйте точную формулу для импульса частицы:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

и точную формулу для эффекта Доплера:

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}},$$

которая получается, если учесть различие в ходе времени в покоящейся и движущейся системах отсчета.

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СКАЗКА

Указом царя Бюрократа каждое подмножество его подданных объявлено тайным обществом и в каждое такое тайное общество входит и царь. Тем же указом было предписано назначить из числа его подданных доносчиков на каждое тайное общество, причем каждый подданный может доносить лишь на одно тайное общество. Докажите, что указ невыполним, так как царю не хватит подданных для корпуса доносчиков.

А. Белов, И. Рубанов

Много битов из ничего

С. АРТЕМОВ, Ю. ГИМАТОВ, В. ФЕДОРОВ

Он думал, что уснула я
И все во сне стерплю,
Иль думал, что я думала,
Что думал он: я сплю!

С. Маршак
Из Ковентри Патмора

Предлагаем вниманию читателей задачу, требующую для решения весьма изощренной логики.

Математик R сказал математикам P и S: «Я задумал два натуральных числа. Каждое из них больше единицы, а сумма их меньше ста. Математику P я сейчас сообщу — по секрету от S — произведение этих чисел, а математику S я сообщу — по секрету от P — их сумму». Он выполнил обещанное и предложил отгадать задуманные числа. Между P и S произошел следующий диалог (высказывания P мы обозначаем буквой π с индексами, высказывания S — буквой σ):

— Я, пожалуй, не могу сказать, чему равны задуманные числа. (π_1)

— Я заранее знал, что Вы этого не сможете. (σ_1)

— А ведь тогда я их знаю. (π_2)

— А тогда и я их знаю. (σ_2)

Попробуйте теперь и вы отгадать задуманные числа.

1. Неужели их можно отгадать?

При первом взгляде на задачу она представляется неразрешимой: как можно отгадать числа, когда про них ничего не сказано?

Попробуем на примере. Пусть R задумал 7 и 42. Тогда он сообщил P число 294, S — 49. Ну, а что дальше? P сказал, что он не может отгадать задуманные числа. Конечно же, не может — он знает только их произведение. Хотя, впрочем, он знает еще, что они натуральные, больше единицы и их сумма меньше ста. А что это дает?

Обозначим задуманные числа через k_0 и l_0, причем пусть — для определенности — $k_0 \le l_0$. Обозначим еще произведение $k_0 \cdot l_0$ через p_0, сумму $k_0 + l_0$ — через s_0.

Итак, P сообщили, что $p_0 = 294$. Тогда k_0 может равняться 2, 3, 6, 7 и 14, а l_0 будет при этом равно, соответственно, 147, 98, 49, 42 и 21. Первые два значения для k_0 нам не подходят — при них $s_0 > 100$. Все равно остаются еще три возможности. Значит, P действительно не может отгадать задуманные числа.

Идем дальше. S утверждает, что он заранее знал, что P не сможет отгадать k_0 и l_0. Как S пришел к такому выводу? Наверняка он попробовал всеми возможными способами представить известное ему s_0 в виде суммы двух допустимых слагаемых:

$$49 = 2 + 47 = 3 + 46 = \ldots = 24 + 25.$$

R мог задумать любую из этих пар чисел. Он сообщил P какое-то из произведений $i \cdot (49 - i)$, и S утверждает, что ни по одному из них P не может отгадать задуманные числа.

А если при некотором i оба числа i, $49 - i$ — простые? Например, если R задумал 2 и 47, то P он сообщил 94, и P прекрасно может отгадать задуманные числа.

Следовательно, если R задумал 7 и 42, то S, получив $s_0 = 49$, не имел бы права произнести (σ_1). Значит, R не мог задумать 7 и 42.

Таким образом, кое-что о задуманных числах сказать все-таки можно.

Преодолев первоначальные сомнения, подумаем, в каком направлении двигаться. Один способ отгадывания уже виден: брать всевозможные пары чисел k_0, l_0, удовлетворяющие неравенствам

$$2 \le k_0 \le l_0 \le 97, \qquad (1)$$

$$4 \le k_0 + l_0 \le 99, \qquad (2)$$

и проверять, «выдерживают» ли они диалог (π_1) — (σ_2).

Поскольку перебор во всех случаях конечен, в принципе можно было бы действовать и так. Однако решать задачу таким образом скучно. Попробуем сократить перебор.

Прежде всего давайте сначала искать не k_0 и l_0, а их сумму s_0: для пары (k_0, l_0) возможных вариантов больше двух тысяч, а для s_0 — меньше ста. Впрочем, и на этом пути лобовой перебор длинен и скучен.

2. Около гипотезы Гольдбаха—Эйлера

Какую информацию можно извлечь из (π_1) и (σ_1)? Что они означают? (π_1), очевидно, означает, что

p_0 неоднозначно разлагается в произведение двух множителей, удовлетворяющих неравенствам (1), (2); (π_1')

(σ_1) означает, что

при любом разложении числа s_0 в сумму двух слагаемых, удовлетворяющих неравенствам (1), их произведение обладает свойством (π_1'). (σ_1')

Высказывание (π_1') позволяет отбросить некоторые произведения, (σ_1') — некоторые суммы.

Из (σ_1') вытекает, что s_0 не представимо в виде суммы двух простых чисел: если $s_0' = q_1 + q_2$, где q_1, q_2 — простые, то число $q_1 \cdot q_2$ единственным образом разлагается в произведение двух множителей, удовлетворяющих неравенствам (1), (2), и, следовательно, не обладает свойством (π_1').

Но любое четное число, удовлетворяющее неравенствам (2), представимо в виде суммы двух простых (это доказывается последовательной проверкой чисел 4, 6, 8, ..., 98).

Следовательно, s_0 — нечетное. Кроме того, $s_0 - 2$ — составное: иначе $s_0 = 2 + (s_0 - 2)$ представлялось бы в виде суммы двух простых. После отбрасывания чисел, не удовлетворяющих этим двум условиям, для s_0 остается 24 возможности.

Выше мы воспользовались тем, что все четные числа от 4 до 98 представимы в виде суммы двух простых.

В 1742 г. член Петербургской Академии наук Христиан Гольдбах в письме к Леонарду Эйлеру высказал предположение, что любое нечетное число, большее пяти, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел. В ответном письме Эйлер выдвинул гипотезу, что каждое четное число, большее двух, представимо в виде сум-

Эта статья была опубликована в «Квант» №3 за 1977 год.

мы двух простых чисел. (Из гипотезы Эйлера гипотезу Гольдбаха вывести очень легко — сделайте это!)

В течение почти двухсот лет гипотезы Гольдбаха и Эйлера казались совершенно недоступными для доказательства, хотя непосредственным перебором были проверены до 9000000.

В 1930 г. замечательный советский математик Л.Г.Шнирельман доказал существование такого k, что каждое натуральное число $n > 1$ может быть представлено в виде суммы не более k простых чисел. Число k у Шнирельмана было довольно велико. В настоящее время доказано, что теорема Шнирельмана верна при $k = 20$.

В 1934 г. академик И.М.Виноградов доказал существование такого n_0, что любое нечетное число $n > n_0$ представимо в виде суммы трех простых чисел. Казалось бы, в век ЭВМ можно было бы поручить машине проверить «остальные» числа (от 7 до n_0), но «постоянная Виноградова» n_0 так велика (по последним оценкам $n_0 > 2^{2^{14}}$), что эта проверка превосходит возможности современных ЭВМ.

В доказательстве же гипотезы Эйлера до сих пор не достигнуто никакого существенного успеха.

3. Дальше в лес

Оказывается, из (σ_1') можно вывести

$$s_0 < 55. \qquad (3)$$

В самом деле, предположим, что $s_0 \geq 55$. Тогда s_0 не обладает свойством (σ_1'): можно так разложить его в сумму двух слагаемых, удовлетворяющих неравенствам (1), что для их произведения не будет выполнено условие (π_1'). Это разложение: $s_0 = (s_0 - 53) + 53$. Из $s_0 \geq 55$ вытекает $s_0 - 53 \geq 2$. Произведение $(s_0 - 53) \cdot 53$ единственным образом разлагается на два множителя, сумма которых меньше ста: поскольку 53 — простое число, один из множителей обязательно имеет вид $53d$; так как $53 \cdot 2 > 100$, $d = 1$. Но по условию s_0 обладает свойством (σ_1'). Противоречие!

После (3) для s_0 остается уже 11 возможностей:

$$11,\ 17,\ 23,\ 27,\ 29,$$

$$35,\ 37,\ 41,\ 47,\ 51,\ 53. \qquad (4)$$

Попробуем теперь без перебора установить, какие из чисел (4) удовлетворяют условию (σ_1'). Пусть s — произвольное из чисел (4). Поскольку s нечетно, всякое его разложение в сумму имеет вид $s = 2a + m$. Допустим, s не обладает свойством (σ_1'). Тогда найдется такое a, что произведение $2a \cdot m$ «расшифровывается» однозначно.

Это a не может равняться единице, так как в этом случае $s = 2 + m$, а произведение $2m$ двояко разлагается в произведение. В самом деле, поскольку $m = s - 2$ — составное нечетное число, $m = pq$, где $p > 2$ и $q > 2$. Оба разложения

$$2m = 2 \cdot pq = 2p \cdot q$$

годятся: $2 + pq = 2 + m = s < 100$ и $2p + q = 2 + pq - (p-1)(q-2) < 2 + pq < 100$.

Значит, $a \geq 2$.

Если $a \neq m$, то $s = 2a \cdot m$ и $s = 2m \cdot a$ — два различных разложения. Поскольку $2a + m = s < 100$ и s не обладает свойством (σ_1'), должно быть $2m + a \geq 100$. Так как $s = 2a + m \leq 53$, имеем $m \leq 53 - 2a$, $2m + a \leq 106 - 3a$. Из $2m + a \geq 100$ и $2m + a \leq 106 - 3a$ вытекает $a \leq 2$. Следовательно, $a = 2$. Из $2m + a \geq 100$ и $m \leq 53 - 2a$ получаем теперь $m = 49$. Итак, в этом случае $s = 53$, причем «подозрительным» является разложение $53 = 4 + 49$.

Если же $a = m$, то $s = 3a$ делится на 3. В (4) таких чисел два: 27 и 51. «Подозрительными» являются разложения $27 = 9 + 18$ и $51 = 17 + 34$.

Число 51 действительно не обладает свойством (σ_1'): $51 = 17 + 34$, и произведение $17 \cdot 34$ при разложении на два множителя дает только одну сумму, меньшую ста. Таким образом, его можно выбросить из списка «кандидатов в s_0».

Числа 27 и 53 удовлетворяют условию (σ_1'): $9 \cdot 18 = 2 \cdot 81$ и $2 + 81 < 100$; $4 \cdot 49 = 7 \cdot 28$ и $7 + 28 < 100$. Итак, для дальнейшего исследования осталось 10 кандидатов: 11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 53, причем все они обладают свойством (σ_1').

4. «Тогда и я их знаю»

Используем, наконец, (π_2) и (σ_2).

Можно было бы истолковать (π_2) и (σ_2) подобно тому, как мы это сделали с (π_1) и (σ_1). Мы попробуем обойтись без этого.

Из (σ_2) и (3) можно вывести

$$s_0 < 33. \qquad (5)$$

Допустим противное: $s_0 \geq 33$. Тогда S, разлагаясь всеми возможными способами s_0 в сумму двух слагаемых, имел бы среди этих разложений

$$s_0 = (s_0 - 31) + 31 = (s_0 - 29) + 29.$$

Если бы P было сообщено произведение $(s_0 - 31) \cdot 31$, то он мог бы, сообразив (3) и учтя, что 31 — простое число, понять, что $(s_0 - 31) \cdot 31$ единственным образом разлагается в произведение двух множителей, сумма которых удовлетворяет (3). В этом случае P отгадал бы k_0 и l_0. Аналогичная возможность была у P, если ему было сообщено произведение $(s_0 - 29) \cdot 29$.

Значит, в случае $s_0 \geq 33$, S и после (π_2) не смог бы точно назвать k_0, l_0, т.е. не смог бы произнести (σ_2).

После (5) остается 5 кандидатов: 11, 17, 23, 27, 29.

Если p_0 имеет вид $2^n \cdot p$, где p — нечетное простое число, то P однозначно определяет k_0 и l_0, потому что из всех сумм $2^{n-t} + 2^t p$ нечетна только одна: $2^n + p$. Поэтому, если s_0 двумя способами представимо в виде $2^n + p$, то S опять-таки не может произнести (σ_2).

Это соображение позволяет отсеять еще 3 кандидата: $11 = 4 + 7 = 8 + 3$, 23 и 27.

5. Тогда и мы их знаем

29 тоже не годится, поскольку $29 = 4 + 25 = 16 + 13$: если бы P имел $p_0 = 16 \cdot 13$, он бы отгадал k_0 и l_0, так как среди сумм $2^{4-t} + 2^t \cdot 13$ нечетна только одна; если бы P имел $p_0 = 4 \cdot 25$, он бы тоже отгадал k_0 и l_0: среди соответствующих сумм нечетна, кроме 29, еще только 25 ($4 \cdot 25 = 5 \cdot 20$), но 25 — 2 — простое число.

Итак, либо $s_0 = 17$, либо задача не имеет решений.

Какое же p_0 могло быть у P при $s_0 = 17$? Переберем все разложения числа 17 в сумму двух слагаемых:

$$17 = 2 + 15 = 3 + 14 = \ldots = 8 + 9.$$

При любом из произведений, кроме $4 \cdot 13$, P не смог бы произнести (π_2). Например, если бы P имел $p_0 = 30$, он среди разложений числа 30 в произведение двух множителей увидел бы и $30 = 2 \cdot 15$, и $30 = 5 \cdot 6$, но как 17, так и 11 обладают свойством (σ_1').

Остается единственный кандидат для p_0: 52. Этот кандидат дает возможность P произнести (π_2): среди всех разложений числа 52 в произведение двух множителей существует ровно одно: $52 = 4 \cdot 13$, дающее нечетную сумму.

Итак, $s_0 = 17$, $p_0 = 52$, $k_0 = 4$, $l_0 = 13$.

(Окончание см. на с. 21)

Если бы Аристотель был прав

Г. МЯКИШЕВ

Если бы механика Аристотеля была правильной, то не было бы самого Аристотеля, да и нас с вами.

Давайте разберемся, справедливо ли это утверждение, и если справедливо, то почему. Задача наша совсем не в том, чтобы продемонстрировать, насколько сейчас мы «умнее» Аристотеля. Преследуется совсем другая цель: как можно лучше представить себе суть классической механики Ньютона и понять, почему ее законы «позволяют» нам существовать.

Классификация движений

Великий Аристотель (384 – 322 до н.э.) с самого начала, казалось бы, поступил совершенно правильно: чтобы разобраться в многообразии видимых движений, нужно их рассортировать — классифицировать.

В те далекие времена Земля считалась центром Вселенной, и все движения рассматривались, естественно, по отношению к Земле. Идее относительности движения не было места.

Естественные движения. В первую очередь следует выделить естественные движения тел, которые называются так потому, что их не надо поддерживать извне. Они совершаются по раз и навсегда заведенному порядку и определяются природой тел.

Тяжелые предметы падают на Землю сами собой, стремясь к центру Вселенной, а легкие тела, подобные огню, поднимаются вверх, так как стремятся к своему естественному месту — краю области, окружающей центр Вселенной (рис.1).

Другой вид естественного движения — это движение звезд, Солнца, Луны и планет (рис.2). Они совершают равномерное круговое движение относительно центра мироздания, ибо именно такое движение является наиболее простым и совершенным. Тела эти состоят из особой небесной субстанции и потому не падают на Землю.

Принудительные движения. Наряду с естественными движениями существуют принудительные. Это те движения, которые не могут происходить сами собой и побуждаются внешними воздействиями — силами. Например, для движения повозки ее все время должна тянуть лошадь (рис.3). И чем сильнее она тянет, тем быстрее движется повозка. Ее скорость прямо пропорциональна силе. Повозка сразу же останавливается после прекращения внешнего воздействия.

Трудности в механике Аристотеля

Представления Аристотеля, по словам выдающегося современного американского философа и историка науки Томаса Куна[1], «не лишены смысла». Более того, Кун считает, что физика Аристотеля «не просто плохая физика Ньютона; она совсем другая».

В самом деле, ведь Аристотель четко фиксирует то, что каждый из нас видит каждый день (или каждую ночь): Солнце, Луна и звезды движутся по окружностям, камни падают вниз, а любая повозка остановится, если ее перестанут тянуть или толкать.

Однако немало движений не совсем укладываются в классификацию Аристотеля и для их «объяснения» приходится прибегать к различным ухищрениям.

Природа не терпит пустоты. Можно проделать очень простой опыт. Нарисуем на полу небольшой круг. Проходя с мячом в руке рядом с ним, нужно на ходу разжать пальцы так, чтобы мяч попал в круг. Если выпустить мяч точно над кругом, то он в него не попадет. Мяч почему-то летит не просто вниз, но еще и вперед по ходу движения. (Как выявили исследования, проведенные в колледжах США, далеко не каждый школьник сразу понимает, что мяч надо выпускать не над кругом, а заранее.)

Как же объясняет падение мяча Аристотель? Вначале мяч движется принудительно под действием руки. При этом за мячом возникают завихрения воздуха, которые и толкают его вперед после того, как пальцы разжались. Здесь складываются естественное движение (падение вниз) и принудительное под действием завихрений воздуха (движение вперед).

А что будет, если мяч бросить в пустоте? Ответ Аристотеля гениально прост: этого вы сделать не можете, так как природа не терпит пустоты.

[1] *Кун приобрел всемирную известность, введя в научный обиход звучное греческое слово «парадигма» для обозначения определенной модели деятельности научного сообщества.*

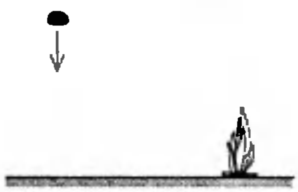


Рис. 1. Камень падает вниз, а огонь от костра поднимается вверх

Рис. 2. Фотография околополярной области неба, снятая неподвижной камерой с экспозицией около часа

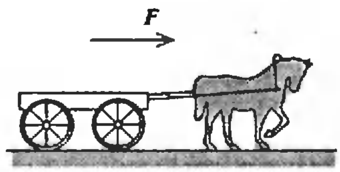


Рис. 3. Принудительное движение повозки

Блуждающие звезды. Почему Аристотель и его современники были убеждены в том, что именно Земля — центр Вселенной? Это же совершенно «очевидно»! Вокруг чего иного, как не центра мироздания, могут совершать звезды свои идеальные пути? К чему, как не к центру, стремятся падающие тела?

Однако давно уже было подмечено, что движение не всех небесных тел такое уж идеальное. Планеты — «блуждающие звезды», как их называли, — описывают на небе какие-то замысловатые петли (рис.4). Аристотель мог этого и не знать, но когда тщательные наблюдения астрономов установили это бесспорно, здание механики Аристотеля зашаталось. Зашаталось, но не рухнуло. Клавдий Птолемей (ок. 100 — ок. 165) объяснил загадочные движения планет, не отказываясь от идеи Аристотеля о совершенном равномерном движении небесной субстанции по окружностям.

Каждая планета движется вокруг некоторого центра O (рис.5), а сам этот центр обращается по окружности вокруг Земли. В момент, когда скорость $\vec{v}_O$ точки O противоположна скорости планеты $\vec{v}_п$, земному наблюдателю кажется, что планета поворачивает назад.

Сложная и несколько запутанная система мира Птолемея тем не менее позволяла предсказывать положения планет довольно точно.

Гелиоцентрическая модель Вселенной

Великий шаг в понимании природы был сделан польским ученым Николаем Коперником (1473 — 1543).

В центре мироздания он вместо Земли поместил Солнце. Благодаря этому сложные движения планет оказались очень простыми, если принять, что все планеты, и Земля в том числе, обращаются вокруг Солнца.

Однако создание системы Коперника не так уж много изменило в механике Аристотеля. Просто место Земли заняло Солнце. Объяснение видимого движения звезд вращением Земли внесло идею относительности движения, но подтверждало мысль Аристотеля о том, что движение по окружности — это естественное движение.

Множественность миров

Истинный переворот в понимании механического движения связан с именем итальянского мыслителя Джордано Бруно (1548 — 1600). Бруно выдвинул идею множественности миров. Солнце не является центром мироздания; оно — одна из бесчисленных звезд, но только расположено недалеко от нас.[2] Это и нанесло решающий удар по механике Аристотеля. Если нет центра мироздания, то бессмысленно говорить о естественном движении вокруг него, и вся классификация движений как отправной метод построения механики утрачивает опору. Поэтому Бруно не только великий астроном, но и великий механик. Фактически его идею следует понимать как принцип равноправности всех мест Вселенной.

Разрушив основную идею механики Аристотеля, Бруно ничего нового на ее месте не сумел создать. Он был обвинен инквизицией в ереси и 17 февраля 1600 года сожжен на костре.

Зарождение новой (теперь ее называют классической) механики

Галилео Галилей (1564 — 1642) первым совершенно отчетливо понял, что отсутствие центра Вселенной не позволяет говорить о движении как о чем-то абсолютном (относительно Земли у Аристотеля или относительно Солнца у Коперника). Движение относительно: можно с полным основанием говорить о движении любого тела по отношению к любому другому. Ну а если движения относительны, ясно, что их классификация — занятие довольно бесперспективное. Так, для человека, отдыхающего в парке на скамейке, и для другого, который в это время катается на карусели, все вокруг движется по-разному.

Не ведет ли это к хаосу, если нельзя даже классифицировать движения? Полностью от классификации движений Галилей не отказался. Но подход к классификации у него был принципиально иным, чем у Аристотеля. Отказавшись вслед за Дж. Бруно от представлений о центре Вселенной, Галилей с неизбежностью пришел к мысли, что если и существует «естественное» движение, то это движение тел, которые движутся «сами по себе», не подвергаясь никаким воздействиям. По мнению Галилея, естественное движение, или движение по инерции, — это прямолинейное движение с постоянной скоростью. В какой-то мере это кажется очевидным: ведь если тело не испытывает воздействия, то оно движется как бы в пустоте. Движение в пустом пространстве нигде не может ни ускориться, ни замедлиться. Тело не может повернуть ни налево, ни направо — просто для таких изменений движения не видно никаких причин.

Однако ни с чем не взаимодействующих тел нет и быть не может. Откуда же у Галилея возникла уверенность в справедливости его умозрительных доводов? Галилей отчетливо понял, что естественному движению с постоянной скоростью мешает сопротивление окружающей среды (воздуха, воды) или сила трения со стороны твердых поверхностей, по которым происходит движение. Простые опыты прямо указывают, что чем мень-

[2] *Дж. Бруно говорил о «множественности обитаемых миров», но для механики обитаемость миров не существенна. Мы и сейчас не знаем, есть ли во Вселенной обитаемые миры кроме нашего.*

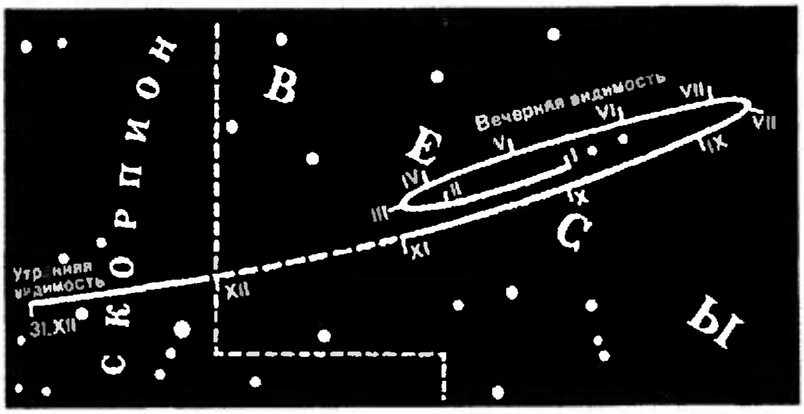


Рис.4. Пример видимого пути планеты по небу за год

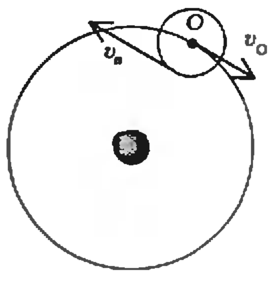


Рис.5. Эпициклы Птолемея

ше сопротивление или трение, тем менее заметно изменяется скорость и тем дольше продолжается движение.

Здесь надо подчеркнуть еще один принципиально важный момент. Огромная, даже основная заслуга Галилея в том, что он по-новому понял, что такое законы движения. Ведь как было у Аристотеля: вижу — классифицирую; классификация движений — непосредственное обобщение наблюдений. У Галилея другой подход: он за видимыми движениями искал потаенную, сокровенную суть управляющих ими законов. Путь Галилея привел к возможности установить общие законы механического движения. Но для этого потребовался гений Ньютона.

Суть механики Ньютона

Есть нечто символическое в том, что Исаак Ньютон (1643 – 1727) родился почти точно через год после того, как не стало Галилея, и в том, что младенец, родившийся крохотным и совсем слабеньким (по словам современника, его можно было утопить в пивной кружке), вошел в историю как один из величайших титанов человеческого духа.

Ньютон понял и математически сформулировал основной факт, относящийся к механическому движению: воздействия тел друг на друга (силы) во всех без исключения случаях определяют не скорости движения тел, как считал Аристотель, а ускорения, т.е. быстроту изменения скорости.[3] В этом и состоит то, что мы называем инерцией. Ускорение возникает сразу, одновременно с началом действия силы, а скорость нарастает постепенно. Даже очень большая сила не в состоянии сообщить телу сразу значительную скорость. Для этого нужно время. Чтобы остановить тело, опять-таки нужно, чтобы тормозящая сила (трение, сопротивление среды или что-либо иное) действовала некоторое время.

Силы — причины изменения состояния движения тел, т.е. их скорости. И если что и нужно классифицировать в первую очередь, то это типы сил, а не типы движений, которые зависят от системы отсчета.

Ньютон сформулировал основной закон динамики (второй закон), который называют уравнением движения: произведение массы на ускорение равно сумме всех действующих на тело сил:

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = \vec{F}. \quad (1)$$

Когда Аристотель прав?

А теперь попробуем перевести качественные представления Аристотеля о движении тел на математический язык, используя понятия и величины, входящие в механику Ньютона.

С самого начала надо отвергнуть разделение движений на естественные и принудительные. С точки зрения механики Ньютона, все движения надо отнести к принудительным (исключая движения свободных тел). Законы механики универсальны, и никакой «небесной субстанции» не существует. Поэтому движения небесных тел — планет, Луны и звезд — должны подчиняться тем же законам, что и падение камня на Землю, и движение повозки, влекомой лошадью. Мы теперь знаем, что в рамках применимости, когда можно пренебречь релятивистскими и квантовыми эффектами, механика Ньютона совершенно справедлива.

Движение, по Аристотелю, безынерционно, т.е. никакого времени для приобретения скорости не требуется, а скорость однозначно определяется приложенной силой. В каких случаях это предположение приблизительно справедливо?

Очевидно, в тех случаях, когда произведение массы на ускорение во втором законе Ньютона много меньше всех сил, действующих на тело, в том числе и силы сопротивления (трения):

$$ma \ll F_1,\ ma \ll F_2 \ldots$$

Значит, механика Аристотеля вполне применима для установившегося движения, когда скорость не меняется и ускорение равно нулю (или очень мало). Это довольно распространенные случаи. Вот почему даже в наше время можно встретить людей, которые смотрят на движение так же, как Аристотель, впрочем, не отдавая себе в этом отчета.

Установившееся движение описывается уравнением

$$\vec{F} + \vec{F}_c(\vec{v}) = 0, \quad (2)$$

где $\vec{F}_c$ — сила сопротивления, зависящая от скорости. Видно, что величина силы сопротивления, а значит, и величина скорости однозначно определяются силой $\vec{F}$. Так, если предположить, что $\vec{F}_c = -\mu\vec{v}$, то получим

$$\vec{v} = \frac{\vec{F}}{\mu}.$$

По Аристотелю, скорость тела тем меньше, чем больше сопротивление среды. Если же сопротивления нет совсем, то под действием силы тело сразу же приобретает бесконечную скорость. Так, в пустоте, по словам Аристотеля, тело падало бы с бесконечно большой скоростью. Этого не происходит только потому, что природа не терпит пустоты.

Уравнение (2) можно назвать «вторым законом» в механике Аристотеля. Как мы увидим дальше, оно совершенно не годится для описания переходных процессов, предшествующих установившемуся движению. Однако чем меньше

[3] *Это утверждение, как и предыдущее утверждение Галилея о сохранении свободным телом постоянной скорости, выполняется только по отношению к инерциальным системам отсчета. Надо полагать, вы знаете, что это такое.*

Аристотель: движение безынерционно, $\vec{v} \sim \vec{F}$ (?)

Ньютон: движение инерционно, $\frac{d\vec{v}}{dt} \sim \vec{F}$ (!)

масса и чем больше коэффициент сопротивления μ, тем меньше интервал времени, на котором механика Аристотеля несостоятельна.

Третий закон можно считать выполняющимся в обеих механиках, хотя сам Аристотель на этот счет ничего не говорит.

Первый закон претерпевает неизбежные существенные изменения. В механике Аристотеля свободное тело, т.е. тело, на которое не действуют силы, будет находиться в покое. Роль инерциальной системы ньютоновской механики будет играть система отсчета, в которой свободное тело покоится. Принцип относительности не выполняется.

Когда Аристотель неправ?

С самого начала здесь нужна оговорка. Ведь если бы Аристотель в самом деле был во всем прав и существовала бы небесная субстанция, из которой состоят тела, движущиеся относительно Земли по совершенным круговым орбитам, то такой мир мог бы существовать и в нем была бы возможна жизнь. Наше заявление в начале статьи в этом отношении двусмысленно. (Не случайно Кун говорит не о ложности механики Аристотеля, а лишь об отличии ее от механики Ньютона.) Но все же, если признать в принципе возможным научный подход к теории принудительных движений по Аристотелю и признать все движения принудительными, то в этом и только в этом смысле можно сказать, что жизнь в мире, подчиненном механике Аристотеля, невозможна. «Объяснения» же Аристотелем естественных движений и выделение их в основной тип движений ни в каком отношении научным считать нельзя. Все сводится здесь к утверждению: «тела движутся так, а не иначе, потому что мы видим, что они именно так движутся». Это не наука.

Падение тел было бы равномерным. Ограничимся простым случаем падения по вертикали (рис.6). На камень со стороны Земли действует постоянная сила P. Как только вы разжали пальцы руки, камень, согласно Аристотелю, тут же начинает падать с постоянной скоростью. С этой же скоростью он достигнет поверхности Земли и немедленно остановится, как только сила упругости со стороны Земли станет равной P по модулю.

К примеру, в механике Аристотеля прыжки с любой высоты были бы безопасны. Опасность падения с высоты целиком и полностью обусловлена инерцией тел. При достижении силой упругости со стороны Земли значения P тело не останавливается, но продолжает двигаться вниз, постепенно замедляя скорость. При этом сила упругости со стороны Земли продолжает нарастать, и в теле человека возникают деформации, значительно превышающие те, которые существуют, когда человек стоит на Земле. Это и ведет к травмам.

Не было бы колебаний. Колебания маятника — грузика на нити или на пружине — происходят благодаря инерции тел. Скорость тела по мере приближения к положению равновесия увеличивается, достигает максимума в положении равновесия, но не становится сразу равной нулю после уравновешивания сил. Она уменьшается постепенно благодаря действию силы, направленной к положению равновесия.

Согласно же механике Аристотеля, скорость маятника максимальна в первый момент, когда отклонение от положения равновесия максимально и максимальна сила, действующая на тело. По мере приближения к положению равновесия сила и скорость уменьшаются и в положении равновесия становятся равными нулю.

Можно предположить, что вряд ли возможно существование живых организмов без каких-либо колебательных процессов. Но главная опасность для жизни в другом.

Не существовало бы планетных систем. Если бы по мановению волшебной палочки механика Ньютона сменилась бы на механику Аристотеля, то Земля и все планеты начали бы падать на Солнце со все возрастающей скоростью (рис.7). Ведь скорость была бы, согласно Аристотелю, направлена по силе, а сила направлена к центру Солнца. И очень скоро с Солнечной системой было бы покончено.

Падения не происходит из-за того, что сила определяет не скорость, а ускорение. Ускорение Земли направлено к Солнцу — в этом смысле Земля «падает» на Солнце, но направленная по касательной к орбите скорость не меняется (в случае круговой орбиты) по модулю, а изменяется лишь по направлению (поворачивается). При сложении ускоренного движения к Солнцу и движения с постоянной скоростью в перпендикулярном направлении получается круговая (или эллиптическая в общем случае) орбита.

Механика Аристотеля и антропный принцип

Почему Вселенная такая, какая она есть? Почему она управляется теми законами, которые мы обнаруживаем? На первый взгляд, эти вопросы кажутся совершенно бессмысленными: не нашего ума это дело. Тем не менее, некий, конечно далеко не исчерпывающий, ответ можно дать. И ответ этот прост: Вселенная должна быть устроена так, чтобы в ней могли появиться разумные существа. В противном случае некому было бы задавать какие-либо вопросы. В этом состоит антропный принцип.

Так вот: антропный принцип «запрещает» механику Аристотеля; механика же Ньютона ему удовлетворяет.

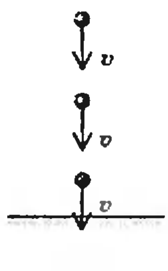


Рис.6. Тела падают на Землю с постоянной скоростью (?)

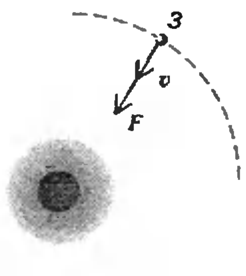


Рис.7. Земля падает на Солнце (?)

МНОГО БИТОВ ИЗ НИЧЕГО

(Начало см. на с. 15)

Задачи

1. Всякое ли нечетное число, большее трех, представимо в виде $2^n + p$, где p — простое число? В отрицательном случае укажите наименьшее непредставимое.

2. Начало условия задачи — вплоть до (σ_1) — то же, что и в начале статьи. Дальше диалог меняется:

— А я заранее знал, что Вы это будете знать заранее. (π_2)

— Я не знаю, чему равны задуманные числа. (o_3)

— А я тогда их знаю. (π_3)

Найдите задуманные числа.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 1995 года по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2 — 95» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1481» или «Ф1488». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1481 — М1490, Ф1488 — Ф1497

М1481. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK, D — точка пересечения биссектрисы внешнего угла при вершине B с описанной окружностью. Докажите, что $\sin A/\sin C - \sin\angle CDK/\sin\angle BDK = 1$.
Я. Константиновский, О. Сулим

М1482. Найдите все натуральные числа x такие, что сумма $1+2+\ldots+x$ равна числу, полученному приписыванием к x (в десятичной записи) слева цифры 1.
П. Филевич

М1483. Найдите наименьшую возможную длину суммы семи единичных векторов с неотрицательными координатами на плоскости Oxy.
Б. Гинзбург

М1484. Можно ли разбить пространство а) на одинаковые тетраэдры; б) на одинаковые равногранные тетраэдры; в) на одинаковые разногранные тетраэдры? (Тетраэдр называется разногранным, если у него все грани различны.)
Н. Васильев

М1485. Докажите, что для всех наборов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $0 < x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$, выражение

$$x_2^k(x_1 - x_3) + x_3^k(x_2 - x_4) + \ldots + x_1^k(x_n - x_2)$$

неотрицательно при $k > 1$ и неположительно при $0<k<1$.
Л. Курляндчик

М1486. Можно ли из чисел 1, 1/2, 1/3, ... выбрать последовательность а) из 5; б) из n; в) из бесконечного числа членов, в которой каждое число равно разности двух предшествующих?
С. Токарев

М1487*. Пусть H — точка пересечения высот, O и I — центры описанной и вписанной окружностей неравностороннего треугольника. Докажите, что из трех отрезков OH, IH, OI наибольший — OH.
В. Сендеров

М1488. а) Существует ли бесконечная последовательность квадратов натуральных чисел, в которой каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих? б) Существует ли возрастающая последовательность квадратов натуральных чисел, в которой сумма двух любых соседних чисел — квадрат целого числа?
О. Крыжановский

М1489. Для каких прямоугольников $m \times n$ на клетчатой бумаге, в клетках которых расставлены нули и единицы, можно получить из любой расстановки любую другую, если разрешается изменять числа одновременно в каждой строке, каждом столбце и на каждой прямой, параллельной диагоналям клеток (в частности, в угловых клетках)?
А. Галочкин

М1490. Пусть x, y, z — длины сторон треугольника, периметр которого меньше π. Докажите, что а) из синусов x, y, z также можно составить треугольник, причем б)* его площадь не превосходит 1/8 суммы синусов $2x$, $2y$, $2z$.
В. Уфнаровский

Ф1488. В углу комнаты вертикально стоит гантелька, состоящая из двух одинаковых массивных шариков, соединенных легким стержнем длиной $l = 0{,}1$ м (рис.1).

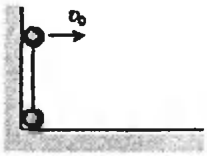


Рис.1

Верхнему шарику толчком сообщают горизонтальную скорость $v_0 = 1$ м/с в направлении от стены, нижний шарик в этот момент неподвижен. Найдите скорость верхнего шарика в момент его удара о пол.

Ф1489. На гладкой наклонной плоскости удерживают клин массой M (рис.2). Верхняя грань клина горизонтальна, и на ней находится кубик массой $5M$. Клин отпускают, и он начинает скользить по наклонной плоскости. Каким может быть максимальное ускорение клина?

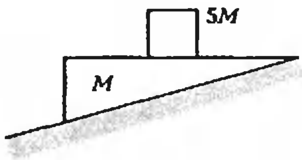


Рис.2

З.Рафаилов

Ф1490. На горизонтальной поверхности стола находится гладкая горка высотой H и длиной основания L, которая может свободно скользить по столу (рис.3). На эту горку наезжает маленькая тележка, масса которой в 3 раза меньше массы горки. Скорость тележки v. На сколько сдвинется горка к тому моменту, когда тележка ее покинет? Время пребывания тележки на горке T.

Р.Александров

Рис.3

Ф1491. В высоком цилиндрическом сосуде с площадью основания $S = 20$ см^2 под легким поршнем находится $m = 9$ г воды (рис.4). Воду начинают нагревать с помощью нагревателя, мощность которого $P = 100$ Вт. Нарисуйте график зависимости вертикальной координаты поршня от времени и найдите максимальную скорость поршня. Воздуха под поршнем нет, стенки и поршень тепла не проводят. Атмосферное давление $p_0 = 1$ атм, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг.

А.Андрианов

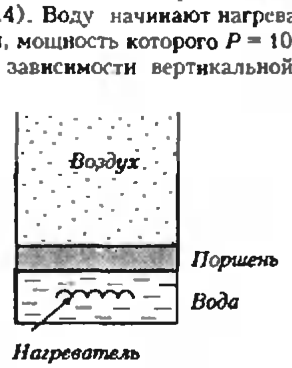


Рис.4

Ф1492. Одна из стенок сосуда, содержащего разреженный гелий, устроена не так, как остальные — при ударе о нее молекулы отскакивают с той же энергией, но перпендикулярно стенке. Во сколько раз отличаются концентрации молекул непосредственно около этой стенки и около других?

А.Сашин

Ф1493. В электрическую цепь включена группа приборов, состоящая из трех миллиамперметров и трех одинаковых вольтметров. Показания части приборов приведены на рисунке 5. Найдите остальные показания.

М.Учителев

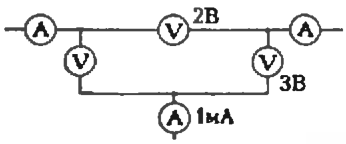


Рис.5

Ф1494. Вертикально расположенный цилиндрический магнит создает магнитное поле. Величина индукции поля над магнитом на его оси меняется с высотой в некоторой заданной области по линейному закону $B(h) = B_0(1 - ah)$. Точно на оси расположено маленькое тонкое непроводящее колечко диаметром d и массой m, по которому равномерно распределен заряд Q. Плоскость колечка перпендикулярна оси магнита. С какой угловой скоростью нужно закрутить колечко в горизонтальной плоскости вокруг оси, чтобы оно падало с малым ускорением?

А.Зильберман

Ф1495. Далеко друг от друга находятся два одинаковых сверхпроводящих тонких кольца. Масса каждого кольца $m = 0{,}1$ кг, индуктивность $L = 0{,}1$ Гн. Кольца расположены на общей оси, плоскости их параллельны. По кольцам текут одинаково направленные токи $I = 1$ А. В некоторый момент кольца отпускают. Найдите скорости колец перед ударом. Внешние силы на систему не действуют.

А.Зильберман

Ф1496. В сеть переменного тока (220 В, 50 Гц) включили последовательно соединенные конденсатор емкостью 10 мкФ и нагреватель сопротивлением 1000 Ом. Какую катушку следует подключить параллельно нагревателю, чтобы ток через него был максимальным? Чему равна величина этого тока?

З.Рафаилов

Ф1497. Два одинаковых радиопередатчика расположены на большой высоте над землей и ретранслируют слабый телевизионный сигнал, передаваемый со спутника. Ветер раскачивает опоры передатчиков так, что амплитуды их качаний существенно превышают длину излуча-

емой волны. Амплитуды радиосигналов, принимаемых антенной от передатчиков, одинаковы. При одновременной работе передатчиков мощность принимаемого сигнала меняется в очень широких пределах. Объясните явление и оцените суммарный процент времени, в течение которого мощность принимаемого сигнала составляет менее $1/1000$ среднего значения принимаемой мощности. Отражением радиосигналов от земли пренебречь.
Р.Александров

Решения задач М1451—1460, Ф1468—1477

М1451. *Даны натуральные числа a и b такие, что число $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит числа $\sqrt{a+b}$.*

Пусть d — наибольший общий делитель чисел a и b. Так как

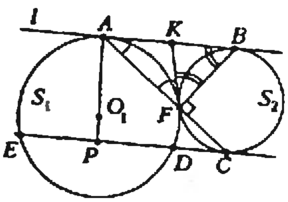
$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab}$$

и ab делится на d^2, то a^2+b^2+a+b делится на d^2. Число a^2+b^2 также делится на d^2. Поэтому $a+b$ делится на d^2 и $\sqrt{a+b}\ge d$.
А.Голованов, Е.Малинникова

М1452. *Окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке F. Прямая l касается S_1 и S_2 в точках A и B соответственно. Прямая, параллельная прямой l, касается S_2 в точке C и пересекает S_1 в точках D и E. Докажите, что а) точки A, F и C лежат на одной прямой; б) общая хорда окружностей, описанных около треугольников ABC и BDE, проходит через точку F.*

а) **Первое решение.** Так как касательные к окружности S_2 в точках B и C параллельны, то BC — ее диаметр, и $\angle BFC=90°$. Докажем, что и $\angle AFB=90°$. Проведем через точку F общую касательную к окружностям (см. рисунок), пусть она пересекает прямую l в точке K. Из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, следует, что треугольники AKF и BKF равнобедренные. Следовательно,

$$\angle AFB=\angle AFK+\angle KFB=\angle FAB+\angle FBA=180°/2=90°.$$



Второе решение. Рассмотрим гомотетию с центром F и коэффициентом, равным $-r_2/r_1$, где r_1 и r_2 — радиусы окружностей S_1 и S_2. При этой гомотетии S_1 переходит в S_2, а прямая l — касательная к S_1 — переходит в параллельную прямую — касательную к S_2. Следовательно, точка A переходит в точку C, поэтому точка F лежит на отрезке AC.

б) Ниже мы покажем, что центр окружности BDE находится в точке A. Поскольку центр окружности ABC есть середина AC ($\angle ABC=90°$), а $\angle BFC=90°$ (см. первое решение п. а)), отсюда будет следовать, что BF есть перпендикуляр, опущенный из общей точки окружностей BDE и ABC на прямую, соединяющую их центры. А это и значит, что прямая BF содержит их общую хорду. Итак, нам достаточно доказать, что $AD=AE=AB$. Первое из этих равенств очевидно (ибо касательная к S_1 в точке A параллельна DE). Пусть r_1 и r_2 — радиусы S_1 и S_2. Опуская перпендикуляр AP на DE, найдем, что $AP=BC=2r_2$, и по теореме Пифагора для треугольников APD и O_1PD, где O_1 — центр S_1,

$$PD^2=O_1D^2-O_1P^2=r_1^2-(2r_2-r_1)^2=4r_1r_2-4r_2^2,$$

$AD^2=AP^2+PD^2=4r_1r_2$. Но легко найти, что общая касательная AB окружностей S_1 и S_2 равна $2\sqrt{r_1r_2}$.
А.Калинин, В.Дубровский

М1453. *Существует ли квадратный трехчлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для любого натурального числа n, в десятичной записи которого участвуют одни единицы, число $P(n)$ также записывается одними единицами?*

Ответ: существует.

Рассмотрим квадратный трехчлен

$$P(x)=x(9x+2).$$

Если $n=\underbrace{11\ldots11}_{k}$, то $9n+2=1\underbrace{00\ldots0}_{k-1}1$.

Следовательно, $P(n)=\underbrace{11\ldots11}_{k}\cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{k-1}1=\underbrace{11\ldots11}_{2k}$.

Значит, этот квадратный трехчлен удовлетворяет условию.
А.Перлин

М1454. *Прямоугольник $m\times n$ разрезан на уголки:*

Докажите, что разность между количеством уголков вида a и количеством уголков вида b делится на 3.

Ясно, что если прямоугольник $m\times n$ разрезан на уголки, то mn делится на 3. Расставим в клетках прямоугольника числа так, как показано на рисунке.

1	2	3	4	...	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
2	3	4	5	...	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$
3	4	5	6	...	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$
...	...	...	...		...	...	...	...
$m-1$	m	$m+1$	$m+2$	...	$m+n-5$	$m+n-4$	$m+n-3$	$m+n-2$
m	$m+1$	$m+2$	$m+3$	...	$m+n-4$	$m+n-3$	$m+n-2$	$m+n-1$

Сумма всех этих чисел равна $mn(m+n)/2$. Сумма чисел, стоящих в уголке вида a, дает при делении на 3 остаток 2; сумма чисел, стоящих в уголке вида b, — остаток 1 (или, что то же самое, -2); суммы чисел, стоящих в уголках вида c и d, делятся на 3. Если n_a и n_b — количества уголков вида a и вида b соответственно, то сумма всех чисел в прямоугольнике имеет вид $3N+2(n_a-n_b)$, где N — некоторое целое число. Из равенства

$3N+2(n_a-n_b)=mn(m+n)/2$ следует, что n_a-n_b делится на 3, так как mn делится на 3.

Л.Емельянов

М1455. *В вершинах выпуклого n-угольника расставлены m фишек (m>n). За один ход разрешается передвинуть две фишки, стоящие в одной вершине, в соседние вершины: одну — вправо, вторую — влево. Докажите, что если после нескольких ходов в каждой вершине n-угольника будет стоять столько же фишек, сколько и вначале, то количество сделанных ходов кратно n.*

Занумеруем вершины n-угольника по часовой стрелке. Пусть из i-й вершины было сделано a_i ходов. Из условия следует, что

$$a_1=\frac{a_2+a_n}{2},\ a_2=\frac{a_1+a_3}{2},\ \ldots,\ a_n=\frac{a_{n-1}+a_1}{2}.$$

Пусть a_1 — наибольшее из чисел a_i. Тогда равенство $a_1=\frac{a_2+a_n}{2}$ возможно лишь тогда, когда $a_2=a_n=a_1$. Теперь из равенства $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$ следует, что $a_1=a_2=a_3$, и т.д. Таким образом, $a_1=a_2=\ldots=a_n$ и число сделанных ходов равно na_1.

И.Рубанов

М1456. *В классе 30 учеников, и у каждого из них одинаковое число друзей среди одноклассников. Каково наибольшее возможное число учеников, которые учатся лучше большинства своих друзей? (Про любых двух учеников в классе можно сказать, кто из них учится лучше.)*

Ответ: 25. Учеников, которые учатся лучше большинства своих друзей, назовем хорошими. Пусть x — число хороших учеников, k — число друзей у каждого ученика. Лучший ученик класса является лучшим в k парах друзей, а любой другой хороший ученик — не менее, чем в $[k/2]+1\ge(k+1)/2$ парах (здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа). Поэтому хорошие ученики являются лучшими не менее чем в $k+(x-1)(k+1)/2$ парах. Это число не может превышать числа всех друзей в классе, равного $30k/2=15k$. Отсюда

$$k+(x-1)(k+1)/2\le15k,$$

или

$$x\le28\frac{k}{k+1}+1. \qquad (1)$$

Заметим далее, что

$$\frac{k+1}{2}\le30-x, \qquad (2)$$

поскольку число учеников, лучше которых учится наихудший из хороших, не превышает $30-x$.

Правая часть неравенства (1) возрастает с ростом k, а неравенство (2) равносильно условию

$$k\le59-2x. \qquad (3)$$

Из (1) и (3) следует, что $x\le28\cdot\frac{59-2x}{60-2x}+1$, или

$$x^2-59x+856\ge0. \qquad (4)$$

Наибольшим целым x, удовлетворяющим (4) и условию $x\le30$, является $x=25$. Итак, число хороших учеников не превышает 25.

Покажем, что оно может равняться 25. Занумеруем учеников числами от 1 до 30 в порядке ухудшения успеваемости и расположим номера в таблице 6×5 так, как показано на рисунке. Пусть пара учеников является парой друзей, если их номера расположены одним из трех способов: а) в соседних строках и в разных столбцах; б) в одном столбце и один из номеров при этом находится в нижней строке; в) в верхней строке. При этом, как нетрудно проверить, все требуемые условия выполнены.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

С.Токарев

М1457. *Высоты AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 тетраэдра $ABCD$ пересекаются в центре H сферы, вписанной в тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что тетраэдр $ABCD$ — правильный. (Высотой тетраэдра называется отрезок перпендикуляра, проведенного из его вершины к противоположной грани, заключенный между этой вершиной и плоскостью этой грани.)*

Обозначим через α плоскость, проходящую через точки A, H, B, и через β плоскость, проходящую через точки C, H, D. Плоскость α перпендикулярна ребру CD, поскольку она содержит высоты AA_1 и BB_1, перпендикулярные соответственно граням BCD и ACD. Аналогично, $\beta\perp AB$. Обозначим через P точку пересечения β с AB, через Q — α с CD.

Отрезки AA_1, BB_1 и QP — высоты треугольника ABQ; поэтому $\angle A_1PH=\angle B_1PH$, т.е. лучи PB_1 и PA_1 симметричны относительно прямой PQ (в плоскости α). Поскольку $\alpha\perp\beta$ и $\alpha\cap\beta=PQ$, эти лучи симметричны также относительно плоскости β. Плоскости $(C_1D_1A_1)$ и $(C_1D_1B_1)$ также симметричны относительно β, поскольку прямая C_1D_1 лежит в плоскости β и существует сфера, касающая этих плоскостей (с центром $H\in\beta$). Теперь легко последовательно доказать, что симметричны друг другу относительно плоскости β: точки A_1 и B_1; лучи QA и QB; точки A и B; отрезки DA и DB. Следовательно, $DA=DB$. Аналогично доказывается равенство остальных ребер.

В.Дубровский

М1458. *В правильном (6n+1)-угольнике K вершин покрашено в красный цвет, а остальные — в синий. Докажите, что количество равнобедренных треугольников с одноцветными вершинами не зависит от способа раскраски.*

Будем для краткости называть равнобедренные треугольники с вершинами в вершинах $(6n+1)$-угольника просто треугольниками.

Заметим, что всякая диагональ и всякая сторона данного многоугольника M принадлежит ровно трем различным треугольникам (этот факт верен только при условии, что число сторон многоугольника имеет при делении на 6 остаток 1 или 5).

Обозначим через n_{CC}, n_{CK} и n_{KK} число диагоналей и сторон M, концы которых окрашены в синий, синий и красный, красный цвета соответственно, а через t_3, t_2, t_1 и t_0 число треугольников, у которых в синий цвет окрашены 3, 2, 1 и 0 вершин соответственно.

Тогда $3\cdot n_{CC} = 3t_3 + t_2$, так как каждая диагональ (или сторона) M принадлежит трем треугольникам, в треугольниках с тремя синими вершинами три стороны с двумя синими концами, в треугольнике с двумя синими вершинами одна такая сторона, а в треугольниках с меньшим числом синих вершин таких сторон нет.

Аналогично доказываются равенства

$$3n_{CK} = 2t_2 + 2t_1 \text{ и } 3n_{KK} = t_1 + 3t_0.$$

Из этих равенств следует, что

$$t_3 + t_0 = n_{KK} + n_{CC} - \frac{1}{2}n_{CK} =$$

$$= \frac{1}{2}K(K-1) + \frac{1}{2}C(C-1) - \frac{1}{2}K\cdot C,$$

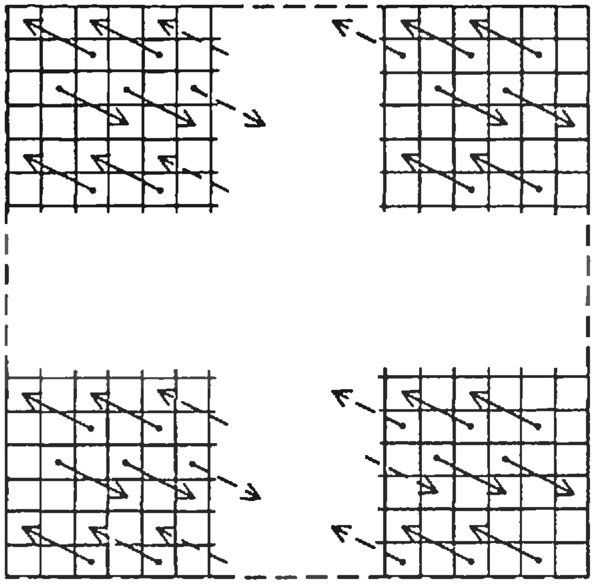
где C — число синих вершин, $C=6n+1-K$. Это и доказывает утверждение задачи.

Д.Тамаркин

М1459. *Игроки А и В по очереди ходят конем на шахматной доске 1994×1994. Игрок А может делать только горизонтальные ходы, т.е. такие, при которых конь перемещается на соседнюю горизонталь. Игроку В разрешены только вертикальные ходы, при которых конь перемещается на соседнюю вертикаль. Игрок А ставит коня на поле, с которого начинается игра, и делает первый ход. При этом запрещено ставить коня на то поле, на котором он уже побывал в данной игре. Проигравшим считается игрок, которому некуда ходить. Докажите, что для игрока А существует выигрышная стратегия.*

Первое решение. Так как число всех возможных позиций в игре конечно, то один из двух игроков обязательно имеет выигрышную стратегию. Если у игрока A нет выигрышной стратегии, то игрок B, правильно играя, выигрывает при любом первом ходе A. Докажем, что это невозможно. Для этого организуем две игры на двух досках. На первой доске A делает произвольный первый ход с поля x на поле y. На второй доске A ставит коня на поле y и ждет ответного хода B на первой доске, после чего в точности повторяет ход B на второй доске в качестве своего хода. На второй доске A делает вертикальные ходы, а B — горизонтальные. Однако если повернуть доску на 90°, то игра происходит в точности по правилам условия задачи. Далее игрок B делает горизонтальный ход на второй доске, который повторяется игроком A на первой доске в качестве своего хода и т.д. Заметим, что игрок B не может на второй доске попасть на поле x, так как B всегда ходит на поле одного цвета, отличного от цвета x. В этой двойной игре A всегда имеет возможность сделать очередной ход, если B имеет такую возможность. Поэтому проиграет B вопреки предположению, что у него есть выигрышная стратегия.

Второе решение. Выигрышная стратегия для игрока A такова. Он должен вначале игры поставить коня на любую клетку, из которой выходит стрелка (см. рисунок), и сделать ход в направлении, указанном стрелкой. После хода B конь вновь окажется в клетке, из которой выходит стрелка. A вновь движется по стрелке, и так далее. Видно, что у него всегда есть возможность сделать



ход, поэтому победа ему гарантирована. При этом он никогда не попадает на клетки, в которых уже побывал.

А.Перлин

М1460. *В клетках бесконечного листа клетчатой бумаги записаны вещественные числа. Рассматриваются две фигуры, каждая из которых состоит из конечного числа клеток. Фигуры разрешается перемещать параллельно линиям сетки на целое число клеток. Известно, что для любого положения первой фигуры сумма чисел, записанных в накрываемых ею клетках, положительна. Докажите, что существует положение второй фигуры, при котором сумма чисел в накрываемых ею клетках положительна.*

Зафиксируем некоторые положения **P** и **Q** фигур I и II на плоскости. Пусть $P_1,\ldots,P_m$ — центры клеток первой фигуры, $Q_1,\ldots,Q_n$ — центры клеток второй, O — центр некоторой фиксированной клетки. Рассмотрим сумму mn чисел, стоящих в концах векторов $\overrightarrow{OP_i}+\overrightarrow{OQ_j}$, проведенных из точки O ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$). Эту сумму S можно получить, сложив суммы чисел в n экземплярах первой фигуры, полученных из **P** сдвигами на векторы $\overrightarrow{OQ_1},\ldots,\overrightarrow{OQ_n}$; поэтому $S > 0$. Но ту же сумму S можно получить, сложив суммы числе в m экземплярах второй фигуры (полученных из **Q** сдвигами на векторы $\overrightarrow{OP_1},\ldots,\overrightarrow{OP_m}$). Поэтому сумма чисел хотя бы в клетках одного из экземпляров второй фигуры положительна.

Н.Васильев

Ф1468. *Жук ползет вдоль прямой, и его скорость все время меняется. У вас есть необычный график — зависимости величины, обратной скорости жука, т.е. $1/v$,* *от координаты жука x (см. рисунок). Определите по графику время прохождения жуком первых 30 метров.*

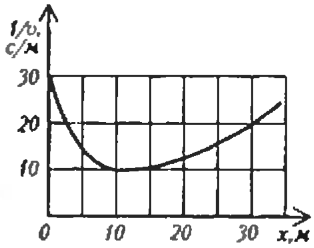


График в условии необычный, но очень удобный для нахождения времени путешествия.

Время Δt прохождения малого отрезка Δx со скоростью v легко найти: $\Delta t = \Delta x \cdot 1/v$. Это произведение равно площади под графиком величины $1/v$ как раз над кусочком Δx (малость Δx нужна для того, чтобы можно было считать скорость прохождения этого кусочка неизменной). Полное же время t равно площади под всем графиком от $x = 0$ до $x = 30$ м. Площадь эту можно приближенно найти по графику, например — по клеточкам. В нашем случае, учитывая половинки и четвертушки клеток, получаем всего 9 клеток. Одна клетка соответствует $\Delta x = 5$ м и $1/v = 10$ с/м, т.е. времени $\Delta t = 50$ с. Тогда полное (искомое) время

$$t = 9 \cdot 50 \text{ с} = 450 \text{ с}.$$

Л.Мельниковский

Ф1469. *При падении теннисного мячика с высоты H на неподвижную ракетку он отскакивает вертикально вверх на несколько меньшую высоту $h = 0{,}9H$. С какой скоростью ракетка должна двигаться навстречу мячику в момент удара, чтобы он подскочил на ту же высоту H?*

Мячик подскакивает на меньшую высоту из-за того, что часть энергии деформации переходит в тепло. Будем считать, что доля переходящей в тепло энергии остается неизменной при различных скоростях мячика перед ударом.

Решим задачу в системе отсчета, которая движется вместе с ракеткой вверх со скоростью u (именно эту скорость мы и хотим найти). В этой системе мячик на высоте H имеет скорость u. Тогда максимальное значение энергии деформации составляет

$$W = mgH + \frac{mu^2}{2},$$

где m — масса мячика. В тепло перешла $1/10$ часть этой энергии, поэтому получаем

$$\frac{9}{10}\left(mgH + \frac{mu^2}{2}\right) = mgH,$$

откуда

$$u = \frac{\sqrt{2gH}}{3}.$$

А.Куперштох

Ф1470. *Жесткий легкий стержень шарнирно закреплен одним из концов. На расстоянии $a = 0{,}1$ м от этого конца на стержне укреплен груз массой $M = 0{,}3$ кг, на расстоянии $2a$ — груз массой m и на расстоянии $3a$ — груз массой $M/3 = 0{,}1$ кг. Все грузы имеют малые размеры. Как зависит период колебаний получившегося маятника (так называемый физический маятник) от массы второго груза m?*

Для малых углов отклонения колебания будем считать гармоническими, а период малых колебаний найдем стандартным способом — приравнивая максимальные значения кинетической и потенциальной энергии маятника.

Для гармонических колебаний максимальное значение угловой скорости стержня ω_m и максимальный угол его отклонения α_m связаны соотношением

$$\omega_m = \frac{2\pi}{T}\alpha_m,$$

где T — период колебаний. Потенциальная энергия для максимального (малого!) угла α_m составляет

$$W_p = Mg \cdot a(1 - \cos\alpha_m) + mg \cdot 2a(1 - \cos\alpha_m) +$$

$$+ \frac{Mg}{3} \cdot 3a(1 - \cos\alpha_m) = 4(M + m)ga\sin^2\frac{\alpha_m}{2} = (M + m)ga\alpha_m^2.$$

Кинетическая энергия при прохождении стержнем положения равновесия с угловой скоростью ω_m равна

$$W_k = \frac{M(a\omega_m)^2}{2} + \frac{m(2a\omega_m)^2}{2} + \frac{(M/3)(3a\omega_m)^2}{2} =$$

$$= 2(M + m)a^2\omega_m^2.$$

Приравнивая эти энергии, находим

$$\omega_m = \sqrt{\frac{g}{2a}}\alpha_m.$$

Тогда

$$T = 2\pi\frac{\alpha_m}{\omega_m} = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{g}}.$$

Получился интересный результат — от массы m ответ вовсе не зависит и период нашего маятника совпадает с периодом колебаний математического маятника длиной $2a$. Но как раз на таком расстоянии от точки подвеса и находится грузик массой m, так что результат этот не случаен.

М.Бойко

Ф1471. *При заполнении сосуда Дьюара жидким азотом была немного повреждена наружная стенка, и в пространство между стенками начал проникать наружный воздух. В результате весь азот испарился за 5 часов, а концентрация молекул в пространстве между стенками за это время увеличилась в 6 раз (она осталась при этом очень низкой — молекулы воздуха пролетали от стенки к стенке практически без соударений). За какое время испарился бы азот, если бы мы обращались с сосудом с крайней осторожностью (не повредили бы стенку)? Сосуд Дьюара — это большой термос с маленьким открытым горлышком. Потери тепла через горлышко можно считать малыми.*

Испаряющийся азот «уходит» через открытое горлышко. Для испарения азота требуется тепло — оно передается от внешней среды молекулами газа, находящимися между стенками термоса. Пока весь газ не испарится, разность температур не меняется — следовательно, «приход» тепла пропорционален концентрации молекул между стенками термоса. Давление там во много раз меньше атмосферного, поэтому можно считать, что концентрация увеличивалась со временем линейно. Воспользуемся средним значением концентрации

$$n_{ср} = \frac{n_0 + 6n_0}{2} = 3{,}5n_0$$

и получим, что без повреждения стенки термоса азот испарился бы за время

$$t = 5\ ч \cdot 3{,}5 = 17{,}5\ ч.$$

Л.Блинов

Ф1472. *В закрытом сосуде объемом 0,1 л находится 10 г воды и ее насыщенного пара при температуре +80 °С. Найдите теплоемкость сосуда. Массой самого сосуда можно пренебречь. Зависимость давления насыщенных паров воды от температуры можно найти в справочнике. Воздух из сосуда был откачан.*

Пусть масса пара m. Передадим системе небольшое количество теплоты Q — при этом малая часть воды массой Δm дополнительно испарится, а температура сосуда увеличится на ΔT. (Интересно, что при другой ситуации, когда пар мог бы сохранять давление, например если бы сосуд был закрыт подвижным поршнем, температура вообще бы не менялась, и теплоемкость оказалась бы бесконечно большой!) Тогда можно записать энергетический баланс:

$$Q = c_в M_в \Delta T + r\Delta m + \Delta U_п,$$

где $c_в$ — удельная теплоемкость воды, $M_в = M - m$ — масса воды, r — удельная теплота парообразования воды, $\Delta U_п$ — изменение внутренней энергии пара за счет нагревания. Простая оценка массы насыщенного пара из уравнения состояния:

$$m = \frac{\mathrm{M} p_н V}{RT} = 0{,}03\ г$$

показывает, что $M_в \approx M$. Кроме того, очевидно, $\Delta U_п \ll c_в M_в \Delta T$. Поэтому

$$Q = c_в M \Delta T + r\Delta m.$$

Примем для малых ΔT, что $\Delta p_н = \alpha \Delta T$, причем величину α оценим, используя справочные таблицы: $\alpha = 3 \cdot 10^3$ Па/К при 80 °С (α можно вычислить и теоретически — это известная формула Клаузиуса). Запишем уравнения состояния до и после нагревания системы:

$$p_н V = \frac{m}{\mathrm{M}} RT,$$

$$(p_н + \Delta p_н)V = \frac{m + \Delta m}{\mathrm{M}} R(T + \Delta T)$$

(испаряется совсем немного воды, и мы пренебрегли изменением объема). После несложных преобразований, пренебрегая произведением малых величин, запишем

$$V\Delta p_н = \frac{m}{\mathrm{M}} R\Delta T + \frac{\Delta m}{\mathrm{M}} RT,$$

или

$$V\alpha\Delta T = \frac{m}{\mathrm{M}} R\Delta T + \frac{\Delta m}{\mathrm{M}} RT.$$

Учтем, что

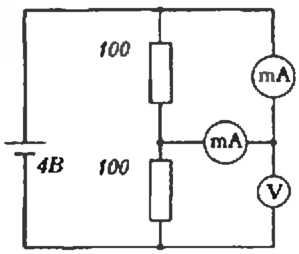
$$\Delta m = \frac{Q - c_в M \Delta T}{r}.$$

Тогда окончательно для теплоемкости сосуда получим

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = c_в M + \frac{\mathrm{M} r}{RT}\left(\alpha V - \frac{m}{\mathrm{M}} R\right) = 46\ Дж/К.$$

З.Рафаилов

Ф1473. *В схеме, изображенной на рисунке, верхний миллиамперметр показывает ток 10 мА, вольтметр показывает напряжение 3 В. Найдите показания второго миллиамперметра. Что покажут приборы, если удалить верхний резистор сопротивлением 100 Ом? Миллиамперметры одинаковые, внутреннее сопротивление батарейки мало.*



По верхнему миллиамперметру течет ток 10 мА, напряжение на нем составляет 4В − 3В = 1В (разность напряжения батарейки U_0 и показаний вольтметра U), значит, сопротивление миллиамперметра

$$r = \frac{1\ В}{0{,}01\ А} = 100\ Ом.$$

Пусть второй миллиамперметр показывает ток I, который течет справа налево, тогда напряжение на нижнем резисторе составляет

$$U_1 = U - Ir,$$

а на верхнем —

$$U_2 = U_0 - U_1.$$

Ток нижнего резистора складывается из токов верхнего резистора и миллиамперметра:

$$\frac{U_1}{R} = \frac{U_2}{R} + I, \text{ или } \frac{U - Ir}{R} = \frac{U_0 - (U - Ir)}{R} + I,$$

откуда найдем ток I:

$$I = \frac{2U - U_0}{2r + R} = \frac{2}{300}\ А \approx 6{,}67\ мА.$$

Теперь перейдем ко второму вопросу задачи, но прежде определим сопротивление вольтметра: в исходной схеме через него течет ток 0,01 А — 2/300 А=1/300 А, его показания U = 3 В, т.е.

$$R_V = \frac{3\text{В}}{1/300\text{А}} = 900 \text{ Ом}.$$

Итак, после отключения верхнего резистора общее сопротивление цепи, подключенной к батарее, равно

$$R_{общ} = 100 \text{ Ом} + \frac{200\cdot 900}{200+900} \text{ Ом} = \frac{2900}{11} \text{ Ом},$$

верхний миллиамперметр покажет

$$I_1 = \frac{4\cdot 11}{2900} \text{А} \approx 15 \text{ мА},$$

нижний —

$$I_2 = I_1\frac{900}{1100} \approx 12{,}5 \text{ мА},$$

а вольтметр —

$$U^* = U_0\frac{1800}{2900} \approx 2{,}5 \text{ В}.$$

З.Александров

Ф1474. *Вдоль одной прямой на расстояниях 0,1 м друг от друга расположены три одинаково заряженных маленьких шарика. В середине находится шарик массой 10 г, слева — шарик массой 0,1 г и справа — шарик массой 1 кг. Заряд каждого шарика 1 мкКл. Шарики отпускают. Найдите их скорости после разлета на большие расстояния. (Точно посчитать не получится, найдите скорости приближенно!)*

Легкий шарик имеет во много раз большее ускорение, чем тяжелый правый — у того масса больше в 10 000 раз, и чем средний, у которого и масса в 100 раз больше, и силы вначале компенсируются.

Итак, будем считать, что маленький шарик улетает при неподвижных остальных шариках. Тогда воспользуемся законом сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = k\frac{q^2}{a} + k\frac{q^2}{2a}$$

и найдем

$$v = q\sqrt{\frac{3k}{ma}} \approx 52 \text{ м/с}.$$

Для расчета скоростей оставшихся шариков запишем уравнения законов сохранения импульса и энергии:

$$Mv_1 - 100Mv_2 = 0,$$

$$\frac{Mv_1^2}{2} + \frac{100Mv_2^2}{2} = k\frac{q^2}{a},$$

и получим

$$v_1 \approx 4 \text{ м/с}, \ v_2 \approx 0{,}04 \text{ м/с}.$$

Видно, что скорость второго шарика не так мала, как хотелось бы. Можно ли уточнить оценки, не пренебрегая хотя бы движением среднего шарика? Один из способов сделать это такой. Пусть маленький шарик пролетел 0,1 м без учета движения среднего. Оценим ускорение среднего шарика в этот момент. Дадим маленькому шарику пролететь еще 0,1 м, оценим ускорение среднего в этом положении, выберем некоторую «среднюю» величину его ускорения и оценим его смещение за данный интервал. Расчет следующего «цикла» для маленького шарика проведем с учетом этого смещения среднего и так далее. Конечно, смещение 0,1 м — это много, лучше взять, скажем, 1 см и считать все это на ЭВМ.

Желаю успехов!

М.Учителев

Ф1475. *К батарейке напряжением U_0 подключены последовательно соединенные конденсаторы, емкости которых C и $3C$. В некоторый момент параллельно конденсатору $3C$ подключают цепочку, состоящую из последовательно соединенных катушки индуктивностью L и идеального диода (диод включен так, что при выбранной полярности батарейки через него может течь ток). Найдите максимальный ток через катушку. Какое напряжение установится на конденсаторе C после прекращения тока через катушку? Через какое время после подключения ток через катушку станет равным нулю?*

Пока ток через катушку течет в правильном направлении, идеальный диод не влияет на процессы в цепи. Его роль проявится в тот момент, когда ток через катушку станет равным нулю, а потом «захочет» сменить направление — диод отключит катушку и процесс закончится. Итак, в момент максимальности тока через катушку напряжение на ней (и на конденсаторе емкостью $3C$) обращается в ноль, значит, заряд конденсатора емкостью C составит CU_0. Следовательно, батарейка «протолкнула» по цепи заряд

$$q_{кон} - q_{нач} = CU_0 - \frac{3}{4}CU_0 = \frac{1}{4}CU_0.$$

Запишем энергетический баланс

$$\frac{3}{4}C\frac{U_0^2}{2} + \frac{1}{4}CU_0\cdot U_0 = \frac{CU_0^2}{2} + \frac{LI_m^2}{2},$$

откуда получим

$$I_m = \frac{U_0}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Немного сложнее определить максимальное напряжение на конденсаторе C. Обозначим его величину U, тогда напряжение на конденсаторе $3C$ составит $U_0 - U$. Энергия катушки равна нулю, поэтому баланс энергий запишем в виде

$$\frac{CU^2}{2} + \frac{3C(U_0-U)^2}{2} = \frac{3}{4}C\frac{U_0^2}{2} + U_0\left(CU - \frac{3}{4}CU_0\right).$$

Отсюда после простых преобразований найдем

$$U = U_0 \pm \frac{1}{4}U_0.$$

Ясно, что нас интересует только больший из корней, тогда окончательно

$$U=\frac{5}{4}U_0.$$

Для нахождения времени протекания процесса заметим, что сумма напряжений конденсаторов постоянна, значит, при стекании заряда Δq с конденсатора $3C$ на конденсатор C притечет заряд $\Delta q/3$, а по катушке протечет заряд $4\Delta q/3$. Обозначив заряд конденсатора $3C$ через q, получаем

$$\frac{q}{3C}=-LI'=-\frac{4}{3}Lq'',$$

или

$$Lq''+\frac{q}{4C}=0.$$

Это уравнение соответствует колебательному контуру с параметрами L и $4C$, и интересующий нас процесс продолжается ровно половину периода его колебаний, т.е.

$$\tau=\frac{1}{2}T=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\sqrt{4LC}=2\pi\sqrt{LC}.$$

А.Зильберман

Ф1476. *В сеть переменного тока включены параллельно две цепочки. Одна состоит из двух соединенных последовательно резисторов, сопротивления которых R и $4R$, другая — из включенных навстречу друг другу двух диодов. Во сколько раз изменится мощность, потребляемая от сети, если соединить между собой средние точки этих цепочек?*

Пока средние точки цепочек не соединены между собой, через включенные навстречу диоды ток не течет и от сети потребляется мощность

$$P_1=\frac{U^2}{R+4R}=\frac{U^2}{5R}.$$

После соединения средних точек каждый из диодов открыт в течение половины периода. Поэтому потребляемая мощность складывается из мощностей каждого резистора, включенного в сеть только половину общего времени:

$$P_2=\frac{1}{2}\frac{U^2}{R}+\frac{1}{2}\frac{U^2}{4R}=\frac{5}{8}\frac{U^2}{R}.$$

Отношение мощностей составляет

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{25}{8}\approx 3.$$

В.Тельнов

Ф1477. *Световой поток от точечного источника света измеряют при помощи маленького фоточувствительного детектора, расположенного на расстоянии $L=0,1$ м. Между источником и детектором помещают плоскопараллельную стеклянную пластинку так, что ее плоскость перпендикулярна прямой, соединяющей источник и детектор. Показатель преломления стекла $n=1,5$. При какой толщине пластинки показания детектора останутся прежними? Стекло прозрачное, коэффициент отражения k на границе стекло — воздух при нормальном падении лучей можно найти по формуле $k=(n-1)^2/(n+1)^2$.*

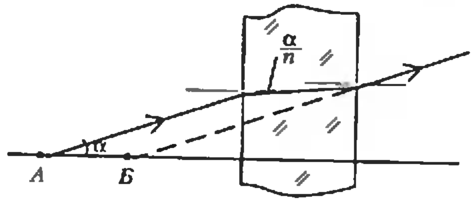
После прохождения пластинки часть светового потока потеряется из-за отражений, зато за счет преломления источник станет несколько ближе к фоточувствительному детектору, так что компенсация в принципе возможна.

Разберемся сначала с отражениями. После первого отражения от границы воздух — стекло в пластину входит $1-(n-1)^2/(n+1)^2=8/9$ падающего потока. На границе стекло — воздух происходит точно такое же отражение, и наружу выходит $(8/9)(8/9)=64/81$ падающего потока. Это, однако, еще не окончательный ответ — часть отраженного потока еще выйдет наружу. Действительно, из воздуха в стекло попадает $8/9$, отражается от границы стекло — воздух $(1/9)(8/9)$ и после еще одного отражения внутрь пластинки пойдет $(1/9)^2(8/9)$, а наружу выйдет $(1/9)^2(8/9)^2$ падающего потока. Если рассмотреть следующие отражения, то получится сумма

$$\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2\left(\frac{1}{9}\right)^4+\ldots=\left(\frac{8}{9}\right)^2\frac{1}{1-1/81}=\frac{4}{5}.$$

Таким образом, сквозь пластинку проходит $4/5$ падающего светового потока.

Теперь о «приближении» источника к детектору. Возьмем луч, выходящий из точки A под малым углом α к горизонтали (см. рисунок). После преломления угол становится равным α/n. Затем луч снова выходит под углом α и теперь кажется исходящим из точки $Б$.



Таким образом, источник как бы приблизится на $\Delta L=AБ$. Из простых геометрических построений (угол α — мал!) находим

$$\Delta L=d\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{d}{3},$$

где d — искомая толщина пластинки.

Итак, можем записать

$$\frac{I}{L^2}=\frac{4}{5}\frac{I}{(L-d/3)^2},$$

где I — интенсивность света. Отсюда получаем

$$d=3L\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\approx 3,2\ \text{см}.$$

На самом деле ответ этот приблизительный — при нахождении «добавок» от многократных отражений мы не учли, что они «приближают» источник не совсем так, как мы считали. Однако поправка совсем мала.

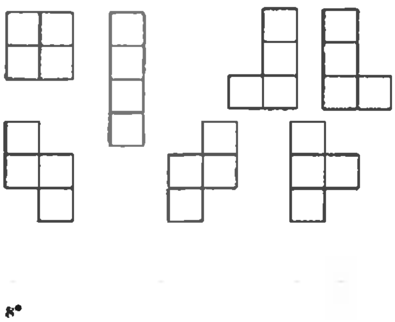
С.Варламов

И снова о тетрисе

М. ИВАНОВСКИЙ

ПОЖАЛУЙ, любой, кто хоть раз сталкивался с компьютером, слышал о компьютерных играх. Так чем же все-таки игры являются в большей степени — добром или злом? Не секрет, что игры съедают драгоценное машинное время и дисковое пространство, отвлекают людей от работы, да и большинство компьютерных вирусов заносится в машину с играми. С «игрушками» борются начальники и лаборанты, операторы да и просто честные труженики, но посмотрим правде в глаза: кто даже из самых яростных противников игр не запускает время от времени любимую программу? Ведь игры развивают реакцию, сообразительность и наблюдательность, помогают, что немаловажно, многим людям преодолеть боязнь перед сложной вычислительной техникой. При написании игр программисты разработали великое множество приемов, оказавшихся полезными во многих «серьезных» применениях информатики. Так что ответить на вопрос о том, вредны или полезны игры, непросто, да и наверное нет однозначного ответа. Они есть — и трудно представить, как развивалась бы вычислительная техника, не будь придуманы компьютерные игры.

Одна из классических игр — тетрис — реализована уже почти на всех ЭВМ. Появившись в то время, когда уже возникали сложные игры с заумными правилами и мощной графикой, эта игра произвела в компьютерном мире переворот, сравнимый с появлением среди головоломок кубика Рубика. «Квант» уже писал о тетрисе, но я все же напомню правила игры. Появляющиеся в случайном порядке фигурки, составленные из четырех квадратов (очевидно, что таких фигур можно придумать 7 — см. рисунок), падают в «стакан». Игрок может смещать фигуры вправо-влево и поворачивать на углы, кратные 90°. Цель его в том, чтобы складывать фигурки как можно плотнее, без пропусков. Как только играющему удается сложить полную горизонтальную строчку, она исчезает, а все лежащие выше опускаются на освободившееся место. Победить здесь игрок, очевидно, не может, ничья же — это бесконечная игра. Однако человек ошибается, и стакан заполняется до краев. Вот только быстро ли? Это зависит от таланта игрока.

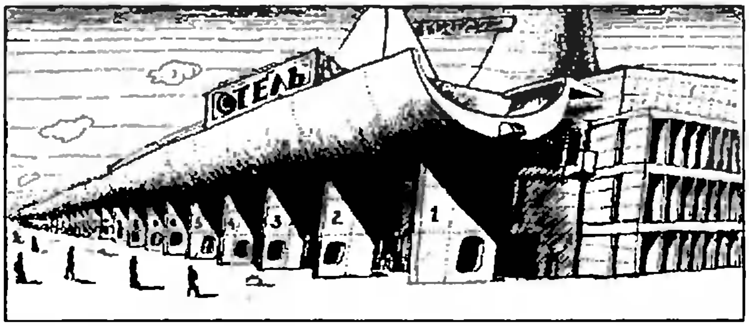


А теперь собственно программа. Этот вариант тетриса рассчитан на микрокомпьютер «Электроника МК-85» и написан на БЕЙСИКе. Длина программы 1115 шагов, для работы требуется 12 дополнительных переменных, итого программа требует 1210 байт памяти, поэтому перед вводом позаботьтесь о выделении необходимого объема памяти. Способ хранения игрового поля не является оптимальным, однако во всех известных автору вариантах программы использован именно такой алгоритм. Если программа введена правильно, она не требует отладки и начинает работать сразу после запуска. Клавиши «2» и «8» позволяют сдвигать фигурку, «—» — поворачивать против часовой стрелки. Игру можно приостановить клавишей «S» (для продолжения нажмите «EXE») или закончить (клавиша «E»). Чтобы возобновить игру, законченную таким образом, дайте команду RUN 40. Игра запускается в режиме повышенного быстродействия.

```
1 DEFM 12:PRINT "Turbo TETRIS":VAC:SET N:N=8
2 FOR A TO 21:Q$(A)="0000000":NEXT A:P$4="1111111":GOTO 10
3 DRAWC E,J:DRAWC F,K:DRAWC G,L:DRAWC H,M:RETURN
4 DRAW E,J:DRAW F,K: DRAW G,L:DRAW H,M:RETURN
5 IF KEY≠CHR 4 THEN 5:RETURN
6 F=19:H=F:M=1:I=2.5:IF A<3;G=20:L=A+1:H=G:M=A+2:I=A/2+2:GOTO 8
7 G=F:L=4:IF A<6;H=20:M=A—1:I=1+A/2
8 D=19:IF A≠4;IF A≠6;D=19.5
9 K=2:E=F:J=3:RETURN
10 B=O:O=INT(8•RAN#):A=O:GOSUB 6: FOR A=0 TO 3:E(A)=E(A)+8
11 NEXT A:CSR 5:PRINT INT C;:GOSUB 4:A=B:GOSUB 6:FOR A=0 TO 3
12 IF VAL GETC(Q$(E(A)),J(A)+1)=0:NEXT A:GOTO 14
13 CSR 0:PRINT "Score:";:GOSUB 5:END
14GOSUB 4:IF N<1;N=1
15 B=1:FOR A=0 TO N:$=KEY:IF$="";NEXT A:C=C—1:GOTO 19
16 A=0:IF$="—" THEN 26:IF$="8"THEN 24:IF$=CHR 4 THEN 21
17 IF$="A"THEN 30:IF$="2";B=—1:GOTO 24
18 IF$="E"THEN 13:IF$="S";GOSUB 5
19 FOR A=0 TO 3:IF VAL GETC(P$(E(A)),J(A)+1)=1 THEN 34:NEXT A
20 GOSUB 3:FOR A=0 TO 4:D(A)=D(A)—B:NEXT A:GOTO 14
21 FOR B TO 22:FOR A=0 TO 3
22 IF VAL GETC(Q$(INT E(A)—B),J(A)+1)=0;NEXT A:NEXT B
23 B=B—1:GOTO 20
24 FOR A TO 3:IF VAL GETC("1"+Q$(E(A))+"1",J(A)+2+B)=1 THEN 15
25 NEXT A:GOSUB 3:FOR A=0 TO 4:I(A)=I(A)+B:NEXT A:GOTO 14
26 FOR A TO 3
27 IF VAL GETC("1"+Q$(D+I—J(A))+"1",E(A)—D+I+2)=1 THEN 15
28 NEXT A:GOSUB 3:FOR A=0 TO 3
29 B=E(A):E(A)=D—J(A)+I:J(A)=B+I—D:NEXT A:GOTO 14
30 IF N>1;N=N—1
31 FOR A=0 TO 7—N:DRAW 24,A:NEXT A:GOTO 15
32 FOR A=0 TO 6:DRAWC A,B:IF VAL GETC(Q$(A),B+1);DRAW A,B
33 NEXT B:RETURN
34 C=C+25:FOR A=0 TO 3:B=INT J(A):$=Q$(E(A))
35 Q$(E(A))=MID(1,B)+"1"+MID(B+2,6—B):NEXT A
36 FOR D=0 TO 20:IF Q$(D)≠P$;NEXT D:GOTO 10
37 C=C+450/N:N=N•.95:DRAW 24,7—N:FOR A=D TO 20
38 IF Q$(A)≠R$(A);Q$(A)=R$(A):GOSUB 32
39 NEXT A:GOTO 36
40 FOR A=0 TO 21:GOSUB 32:NEXT A:GOTO 31
```

А ТАК ЛИ ХОРОШО ЗНАКОМА ВАМ
бесконечность?

Понятие бесконечности появилось далеко не сразу. Долгое время казалось, что существует некое самое большое число, дальше которого уже считать невозможно. Конец этому представлению положил великий Архимед, в своей книге «Псаммит» («О числе песчинок») показавший, как с помощью существовавшей тогда системы счисления выражать все большие и большие числа. Итак, ряд натуральных чисел – 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... – оказался бесконечным. Сразу возникло множество вопросов: что будет, если очень малое число сложить само с собой бесконечное число раз? Бесконечно ли число атомов во Вселенной? А число точек на отрезке?



Архимед

Оказалось, что у бесконечного количества есть свойства, которых нет у обычных чисел. Например, каких чисел больше: натуральных или четных? На первый взгляд, четных чисел должно быть меньше, ведь есть еще и нечетные! А и нет: напишем под каждым натуральным числом четное:

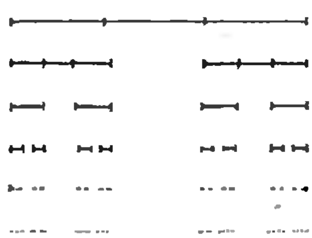
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ...

2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 ...

Получается, что их поровну: ни верхний ряд, ни нижний не «вырывается вперед». Мы пересчитали все четные числа с помощью натуральных... Итак, оказалось, что часть может быть равна целому. А раз так, в бесконечную гостиницу, заселенную бесконечным числом приезжих, можно разместить еще столько же гостей: всех прежних жильцов переселить в четные номера, а вновь прибывших – в нечетные, и места всем хватит... (Об этом есть замечательный фантастический рассказ, написанный Н.Виленкиным по мотивам «Звездных дневников Йона Тихого» С.Лема. Найдите и прочитайте и то и другое – вы получите большое удовольствие!)

Мало того, оказалось, что всех рациональных чисел – т.е. тех, которые можно представить несократимыми обыкновенными дробями, – столько же, сколько натуральных, хотя натуральные числа – лишь часть всех рациональных! Итак, часть бесконечного может быть равна целому; а всякую ли бесконечность можно пересчитать так, как мы это сделали с четными числами? Оказалось, не всякую! Невозможно пересчитать точки на отрезке, действительные числа (выражающиеся всеми конечными и бесконечными десятичными дробями), даже все действительные числа от 0 до 1. Стали говорить, что их количество несчетно. Замечательный пример несчетного множества точек построил великий немецкий математик Георг Кантор. Он взял отрезок, разделил его на три части, выбросил середину; затем с оставшимися отрезочками проделал то же самое – разделил их на три части и выбросил середины; этот процесс, продолженный до бесконечности, должен привести к тому, что от отрезка останутся лишь отдельные точки, причем их, на первый взгляд, должно остаться совсем немного. Как бы не так! Оказалось, что оставшихся точек столько

Георг Кантор



же, сколько их было на всем отрезке — нечетное количество. Но общая длина всех выкинутых отрезков равна длине исходного отрезка! Выходит, на отрезке есть компания точек, столь же многочисленная, как и все точки отрезка, и не занимающая на нем никакого места!

Что же касается числа атомов во Вселенной, оно хоть и огромно, но конечно (если только Вселенная не бесконечна, о чем пока никто ничего не знает...). А как же точки на отрезке? Но отрезок и точки — это абстракция, идеальный объект, которого на самом деле тоже нет в природе. Бесконечность есть чисто математическое понятие, удобное обобщение, а не существующее в действительности явление.

Мы можем рассмотреть, скажем, такую бесконечную сумму:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

и считать ее равной 2. Действительно, из рисунка видно, что прямоугольники площади 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ... все умещаются в прямоугольнике площадью 2. Аналогично, бесконечной сумме $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots$ можно приписать значение $\ln 2$, а вот сумма $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ бесконечно возрастает с увеличением числа слагаемых. Что же касается суммы $1-1+1-1+1-1+\ldots$, то ей приписывали разные значения. Одни считали, что она равна нулю, так как $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0+0+\ldots=0$, другие — что единице, так как $1-(1-1)-(1-1)-\ldots=1-0-0-0-\ldots$; а третьи — что $1/2$, так как обозначив эту сумму через x, получим уравнение $x=1-x$, откуда $x=\frac{1}{2}$. Ясно, что такую бесконечную сумму нельзя считать равной никакому числу.

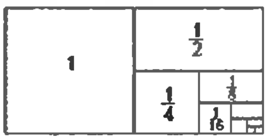
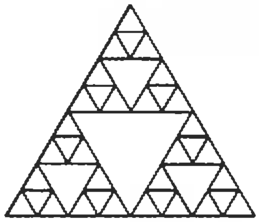


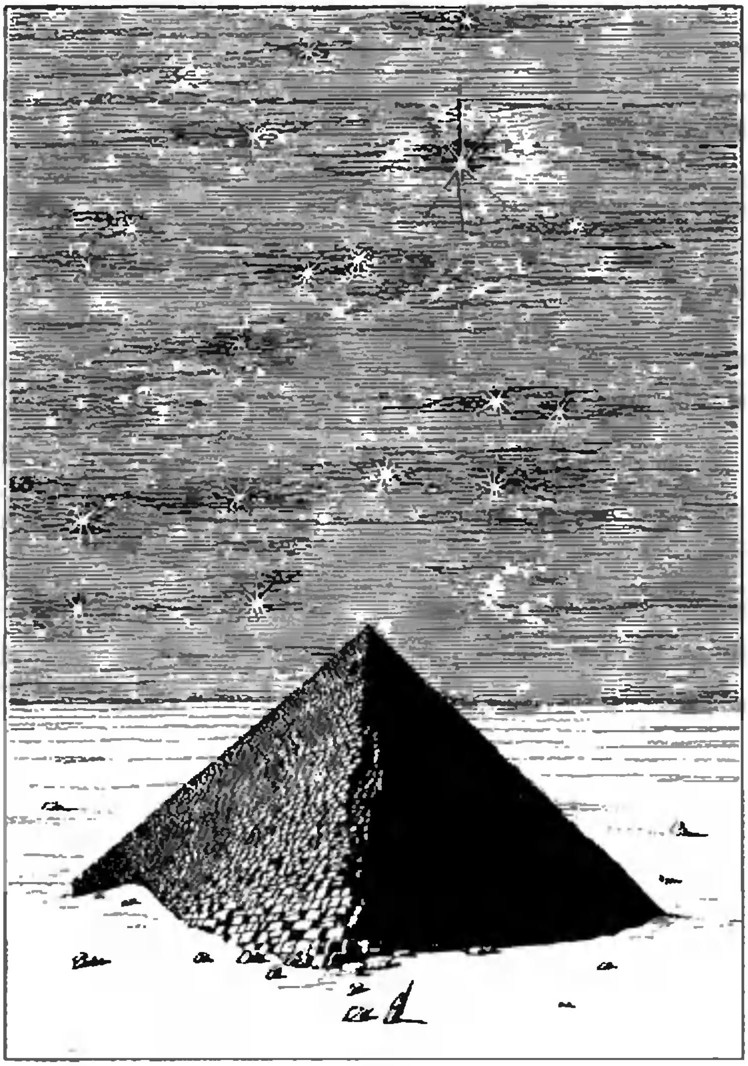
Рис. 2

Бесконечные последовательности и ряды возникают в математике на каж-



дом шагу. Когда мы вычисляем площадь круга, то последовательно находим площади правильных вписанных многоугольников со все большим числом сторон, а затем ищем их предельное значение при бесконечном увеличении числа сторон.

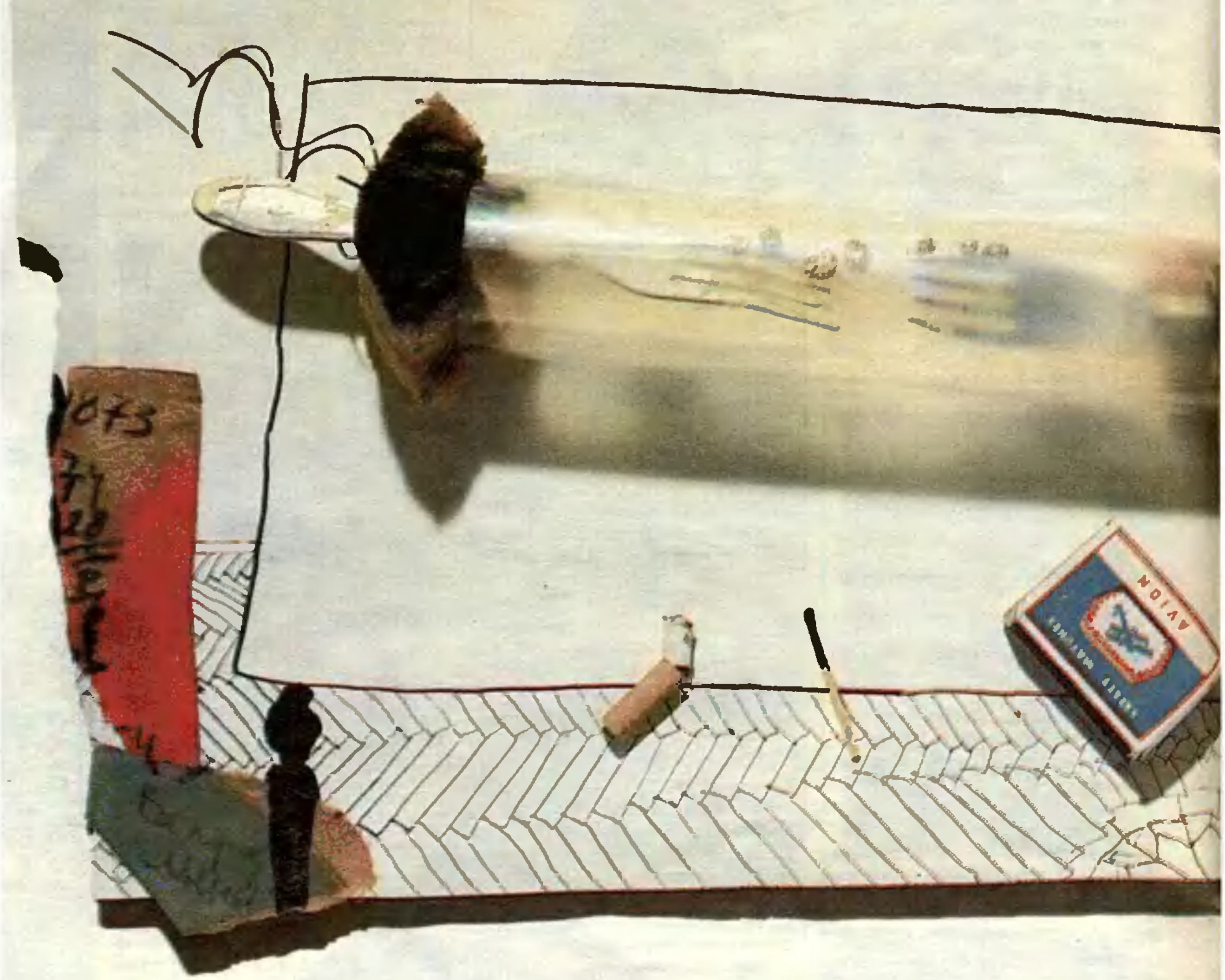
Природа бесконечности занимала и продолжает занимать многих философов (они даже придумали термин «дурная бесконечность», видимо, совсем с этой бесконечностью измучившись). Математики же отнеслись к делу проще: раз бесконечность есть в математическом мире, ее надо изучать, а объяснения оставить философии...



ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Опыты с когерером

И.ГАЛЛАЙ, Л.КРЫЖАНОВСКИЙ

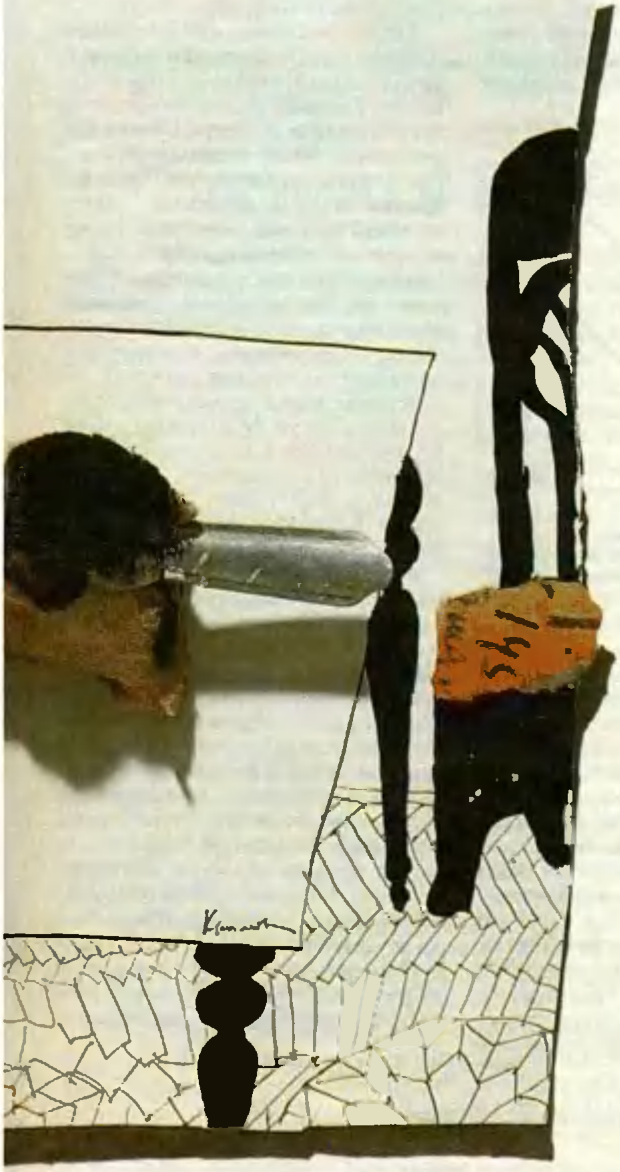


По решению ЮНЕСКО, в 1995 году повсеместно отмечается столетие радио. И действительно, к 1895 году в принципе имелись все необходимые элементы для изобретения беспроволочного телеграфа. Последним из них был когерер — детектор электромагнитных волн.

В 1890 году французский физик Э. Бранли заметил, что искровые разряды от электризационных машин или других устройств вызывают резкое снижение сопротивления металлических опилок, нанесенных на изолирующую пластинку или помещенных в трубку из изолирующего материала. При этом эффект наблюдался даже тогда, когда расстояние между искрой и опилками достигало более 20 м. (Знал бы тогда Бранли, что всего через несколько лет дальность связи на основе открытого им эффекта составит десятки километров!)

Английский физик О. Лодж понял ценность «трубки Бранли» как детектора электромагнитных волн и назвал ее когерером (от латинского cohaerere — сцепляться), выдвинув гипотезу сцепления и даже сваривания опилок под действием электромагнитного излучения. Гипотеза Лоджа не подтвердилась, но термины «когерер» и «когерерный эффект» употребляются и по сей день, хотя сам прибор в начале XX века был вытеснен другими детекторами.

Характерно, что сопротивление опилок остается низким в течение длительного времени и после прекращения воздействия электромагнитного излучения, а при встряхивании когерера сразу же



Эдуард Бранли (1846–1940). С фотографии 1896 года

восстанавливается прежнее, высокое значение сопротивления. Русскому физику и электротехнику А.С. Попову принадлежит заслуга создания надежного автоматического встряхивателя когерера (1895 г.).

Нетрудно сделать когерер самому и выполнить с ним интересные и поучительные опыты.

Простейший когерер, который мы назовем аналогом когерера Бранли, можно изготовить из полиэтиленовой трубки диаметром 2,5 мм (от использованного стержня шариковой ручки). С одного торца в трубку плотно вставляется цилиндрический стальной электрод — например, гвоздь с плоскосошлифованным концом, а с другого ввинчивается стальной электрод из винта М3 (также с плоскосошлифованным концом), который позволяет изменять плотность упаковки опилок в междуэлектродном промежутке. Опилки можно получить, стачивая грубым напильником пластину или гвоздь из низкоуглеродистой стали. В таком случае контакты опилок с электродами будут иметь ту же природу, что и контакты между опилками.

Когерер Попова был выполнен несколько иначе. В нем (рис. 1, *а*) использовалась горизонтально расположенная стеклянная трубка диаметром 1 см и длиной 6 – 8 см с приклеенными к внутренним стенкам продольными электродами из платиновой фольги, выведенными наружу с противоположных торцов, так что ток протекал через опилки перпендикулярно к оси трубки. Зазор между электродами, проходивший параллельно оси трубки почти на всю ее длину, составлял около 2 мм. Трубка была наполовину заполнена железным порошком и с торцов закрывалась пробками.

Мы предлагаем для изготовления электродов такого когерера использовать боковую стенку консервной банки из луженой жести, поскольку олово дает подходящий контакт с железными опилками. Другое сочетание материалов опилок и электродов может привести к чрезмерно высокому сопротивлению когерера во всех условиях эксперимента и, в результате, лишь к слабо выраженному когерерному эффекту.

Можно изготовить также упрощенный когерер Попова, в котором электроды шириной 5 мм не приклеиваются к стеклу и располагаются не параллельно, а встык (рис. 1, *б*). Междуэлектродный зазор проходит поперек оси, примерно в середине трубки. Один электрод зажимается пробкой и фиксируется церезином (подойдет и парафин), а другой электрод можно перемещать, немного вытаскивая пробку. Зазор варьируется в пределах от 1 до 5 мм.

Для проверки работоспособности когерера можно проделать опыт Бранли. От источника напряжения 1 – 300 В мы заряжали и разряжали конденсатор с фторопластовым пленочным диэлектриком через соединительные провода, которые играли роль излучающей рамочной антенны. Конденсатор располагался вблизи когерера, подключенного к омметру проводами, которые играли роль приемной антенны. Мы наблюдали резкое снижение сопротивления

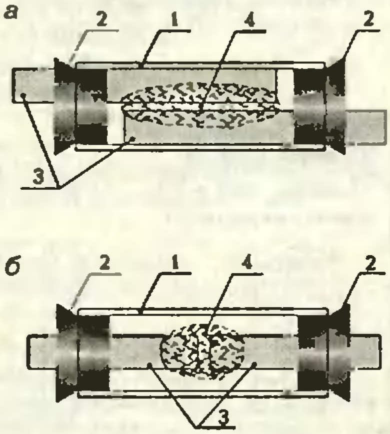


Рис. 1. Когереры Попова: а) подлинный; б) модифицированный. Обозначения: 1 – стеклянная трубка, 2 – пробки, 3 – электроды из фольги, 4 – опилки

(когерерный эффект) как при зарядке, так и при разрядке конденсатора. Эффект практически не зависел от того, использовался конденсатор емкостью 0,01 или 1 мкФ. Тем самым мы убедились, что переключение когерера из высокоомного состояния в низкоомное обусловлено главным образом не энергией, запасаемой конденсатором, а напряжением U_0, которое в условиях эксперимента с примерно одинаковыми излучающей и приемной антеннами, расположенными в непосредственной близости друг от друга, должно лишь незначительно превышать напряжение $U_п$ переключения когерера.

При проведении этого опыта вы можете столкнуться с некоторыми трудностями. Так, если вы будете пользоваться омметром, рассчитанным на работу на низких частотах, то можете и не обнаружить когерерного эффекта. Катушки такого омметра выполнены не бифилярной, а обычной намоткой, и импульсное напряжение, вместо того чтобы воздействовать на когерер, может практически полностью выделиться на катушках, так что переключения когерера не произойдет.

Чтобы исправить положение, зашунтируйте стрелочный прибор коротким куском провода при воздействии импульса на когерер, а при измерении сопротивления когерера в низкоомном состоянии аккуратно, не встряхивая когерер, уберите перемычку.

Во избежание этих трудностей можно, конечно, подключить омметр к когереру после воздействия импульса, но тогда придется предусмотреть какую-то другую антенну, роль которой у нас играли соединительные провода омметра.

Вас может подстеречь и другой «сюрприз»: омметр будет показывать низкое сопротивление даже до воздействия импульса на когерер. Это может быть обусловлено тем, что напряжение питания омметра превышает $U_п$. С таким случаем столкнулись авторы этих строк, проводя опыт Бранли с когерером итальянского инженера и предпринимателя Г. Маркони производства около 1900 года, хранящимся в Центральном музее связи им. А.С. Попова в Санкт-Петербурге.

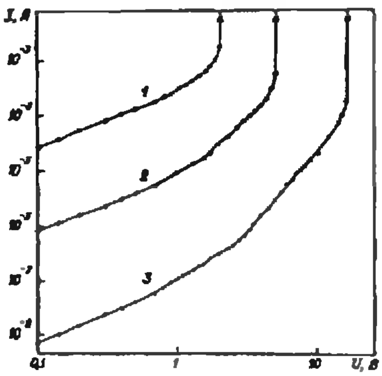


Рис. 2. Вольт-амперные характеристики когерера. Опилки: 1 — свежеприготовленные; 2 — после 30 суток хранения в нормальных условиях; 3 — прогретые при 150 °С на воздухе в течение 1 часа

В приемниках и Попова, и Маркони когерер располагался внутри железного корпуса, из которого выводился наружу один из электродов когерера для присоединения к антенне. Отсюда можно заключить, что, как любой детектор (ламповый или полупроводниковый диод и т.п.), когерер непосредственно реагирует не на электромагнитную волну как таковую, а на электрическое напряжение на своих зажимах. Чтобы убедиться в этом, проделайте опыт Бранли, поместив когерер в стальной кожух, не пропускающий магнитную составляющую электромагнитной волны. Вы получите практически такой же эффект, как и с неэкранированным когерером.

Для понимания природы когерерного эффекта представляют интерес вольт-амперные характеристики когерера. На рисунке 2 представлены полученные нами характеристики когерера Попова при расстоянии между электродами 1 мм. Мы установили, что при некоторых напряжениях $U > U_п$ происходит лавинообразный рост тока когерера со временем, т.е. электрический пробой.

Интересно также поэкспериментировать с клинообразным зазором между электродами в когерере Бранли. Оказывается, сопротивление и напряжение переключения когерера зависят от его положения: если широкая часть клинообразного зазора, не полностью заполненного опилками, будет сверху, то сопротивление и напряжение переключения когерера будут наименьшими, и наоборот. Клинообразный зазор в когерере был применен Маркони.

В заключение дадим краткое объяснение когерерного эффекта.

Металлические опилки покрыты тонким слоем полупроводникового оксида. При наличии на когерере постоянного или переменного напряжения, не превышающего $U_п$, электрическое сопротивление когерера весьма велико. При появлении на когерере постоянного или импульсного напряжения, превышающего $U_п$, происходит электрический пробой полупроводникового оксидного слоя в местах контакта опилок, в результате чего сопротивление когерера резко снижается. При встряхивании когерера опилки начинают контактировать с другими участками поверхности — с ненарушенным оксидным слоем, вследствие чего когерер возвращается в высокоомное состояние.

НАМ ПИШУТ

СУММА КУБОВ

Известно, что $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Это легко увидеть из рисунка 1.

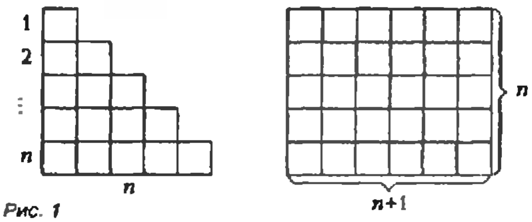


Рис. 1

А вот то, что $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, доказать сложнее, но и здесь есть изящное геометрическое доказательство, изображенное на рисунке 2.

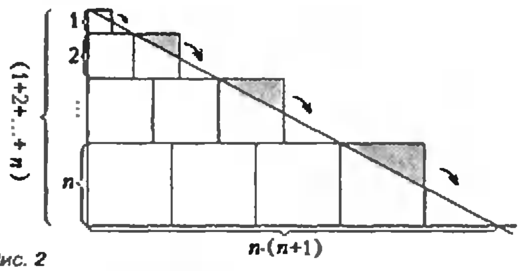
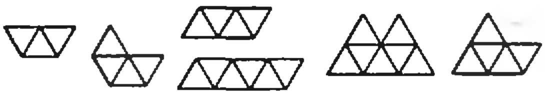


Рис. 2

Журнал «Дельта» (Польша), № 10, 1994 г.

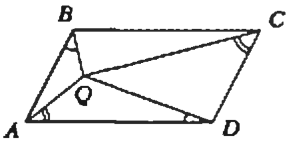
Задачи

1. Из фигурок, изображенных на рисунке, сложите равносторонний треугольник. (*Н.Антонович*)



2. Прекрасная вещь — электронные часы, но ночью разглядеть на них что-либо невозможно. Однажды я выехал поездом Москва — Китеж, отправлявшимся из Москвы в 18.00. Езды до Китежа 12 часов. И обратный поезд, выходящий из Китежа в 23.00, тратит на дорогу 12 часов. Я хотел выйти на станции Вешки и старался не уснуть, но уснул и очнулся, когда поезд остановился на какой-то станции. Попытки увидеть время на моих часах не увенчались успехом, но вот я услышал: «К первому пути прибывает поезд Китеж — Москва». После недолгого размышления я вычислил примерное время и успокоился — до Вешек еще было полчаса езды. А вы сможете вычислить время моего пробуждения? (*Л.Синицын*)

3. В параллелограмме $ABCD$ взята точка Q такая, что $\angle ABQ = \angle ADQ$ (см. рисунок). Докажите, что $\angle DAQ = \angle DCQ$. (*В.Произволов*)



4. Существует ли такой четырехугольник, что любую его вершину можно перенести в новое место, получив четырехугольник, равный исходному? (*С.Токарев*)

5. Братья Карамазовы грузили апельсины в бочках. Все бочки были одинаковыми и содержали по 125 кг апельсинов. Сначала братья загрузили бочки поровну в две трехтонки, но затем погрузили иначе: в первую машину поместили вдвое больше бочек, чем во вторую. И хотя первая трехтонка оказалась загруженной более чем на 85%, в нее можно было погрузить еще не меньше трех бочек с апельсинами без перегрузки машины. Сколько бочек грузили братья Карамазовы? (*И.Акулич*)

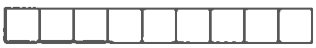
Конкурс «Математика 6—8»

Решения задач из этого номера высылайте не позднее 15 июня 1995 года по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, "Квант" (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, класс.

16. На шахматной доске расставлено n ферзей, n королей и n слонов так, что ни одна фигура не бьет другую. При каком наибольшем n это возможно?
А.Грибалко

17. Существует ли 1995 натуральных чисел, сумма которых равна их произведению?
В.Замков

18. A и B играют в следующую игру. В таблице 1×9 (см. рисунок) A расставляет числа 1, 2, 3, ..., 9 так, как



хочет, затем B ставит фишку на одну из клеток. После этого они поочередно перемещают фишку каждый раз в одну из соседних клеток. На каждой клетке фишка может побывать не больше числа раз, чем число, написанное на этой клетке. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?
С.Костин

19. Дан треугольник ABC. Докажите, что существует единственная точка M такая, что $MA + CB = MB + AC = MC + AB$.
А.Савин

20. В таблице 9×9 расставлены числа 1, 2, ..., 81. Вам предлагается узнать эту расстановку. Разрешается спросить о том, какие числа находятся в указанном вами квадрате, стороны которого проходят по линиям сетки. За какое наименьшее число вопросов можно всегда восстановить расстановку?
С.Токарев

Путешествие в луче отраженного света

Т. БУТКОВСКАЯ

Представьте себе, что вы попали в экстремальную ситуацию — вас выбросило на необитаемый остров, ваша яхта затерялась в океане или экспедиция сбилась с пути в пустыне. Вас ищут, но как связаться с поисковым самолетом — радиосвязи у вас нет, а костер развести невозможно? Не отчаивайтесь! Если в небе светит солнце, а в вашем рюкзаке есть зеркальце, фольга от шоколада или жестяная консервная банка — они вам помогут подать световой сигнал, который будет виден на большом расстоянии.

Чтобы убедиться в этом, можно проделать такой опыт. В солнечный день выйдите из дома, прихватив с собой маленькое зеркальце. А ваш друг пусть останется дома и ждет вашего сигнала — постарайтесь солнечным зайчиком попасть в его окно. (Интересно, с какого расстояния вам удастся увидеть солнечный зайчик?)

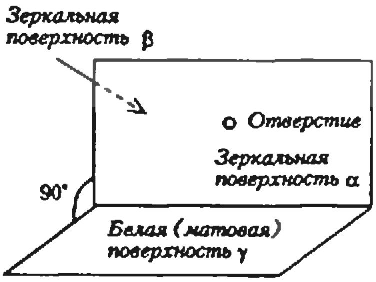


Рис. 1

Из опыта вы скоро увидите, что не каждый сигнал сможет принять ваш друг. И еще, чем дальше вы уходите от дома, тем труднее попасть солнечным зайчиком в определенное место. А ведь поисковый самолет летит высоко в небе и с большой скоростью! Поэтому, если не знать, как правильно навести зеркальце на самолет, то, скорее всего, ваш сигнал получит не летчик, а ... облако.

Оказывается, все не так страшно. Достаточно несколько усовершенствовать зеркальце, и точность попадания солнечного сигнала станет достаточно высокой. Назовем такое устройство сигнальным зеркалом и для краткости будем обозначать его СЗ. Оно представляет собой две плоскости, расположенные под прямым углом друг к другу (рис. 1). Вертикальная плоскость — зеркальная с обеих сторон (α и β) и в середине имеет отверстие, а горизонтальная плоскость (γ) — матовая, лучше всего белая.

СЗ легко сделать из листа полированной жести или из пластины старого глянцевателя — они легко сгибаются и сверлятся. Согните пластину, как показано на рисунке 2, в сложенной вдвое части просверлите отверстие (диаметром порядка 5 мм), а другую часть пластины покрасьте белой краской или оклейте белой бумагой. Попробуйте также сделать СЗ из фольги и сравните эффективность обоих зеркал.

Как же пользоваться СЗ? Возьмите зеркало в руки так, чтобы солнце и «поисковый самолет» были перед вами, и добейтесь того, чтобы на горизонтальной плоскости γ появился солнечный зайчик *1* (рис. 3). Теперь найдите его отражение *2* на вертикальной плоскости α и, стараясь не потерять из виду самолет в отверстии, поверните зеркало так, чтобы зайчик *2* совместился с отверстием *O*. Когда это произойдет, солнечные лучи, отраженные зеркальной поверхностью β, попадут точно на самолет и летчик увидит яркий луч света, резко выделяющийся на темном фоне земной поверхности.

Чтобы лучше представить принцип действия СЗ, проделайте такой опыт. Возьмите тонкую вязальную спицу и пропустите ее сквозь отверстие в зеркале в направлении движения луча от солнца, пока ее нижний конец не упрется в горизонтальную поверхность. На зеркальной поверхности α вы получите отражение луча-спицы. А то, что это отражение в точности совпадает с отраженным лучом от зеркальной поверхности β, мы сейчас покажем.

Посмотрите на рисунки 4 и 5. Здесь l — луч, падающий на плоскость γ сквозь отверстие O, l' — луч, отраженный от поверхности β, OP — перпендикуляр к поверхностям α и β, A — точка падения луча l, т.е. зайчик на плоскости γ, B — отражение точки A в плоскости α, OA — часть луча l, OB — отражение части луча OA на плос-

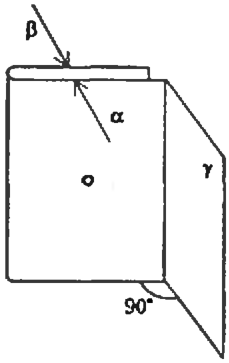


Рис. 2

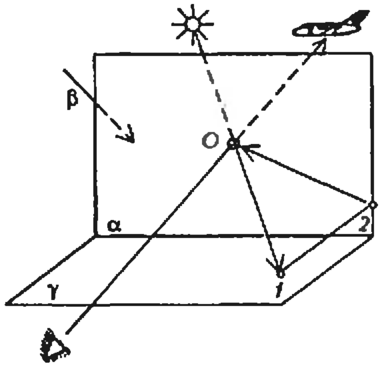


Рис. 3

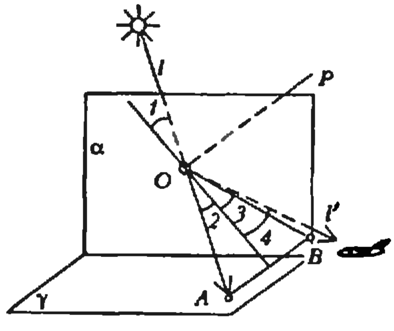


Рис. 4

кости α. Нам надо сказать, что OB принадлежит l'.

Очевидно, что треугольник AOB лежит в плоскости lOl', углы 1 и 2 равны как вертикальные, углы 2 и 3 равны по правилам построения зеркального изображения, а углы 1 и 4 — по закону отражения света от плоской поверхности. Отсюда получаем, что углы 3 и 4 равны, а значит, отрезок OB лежит на отраженном луче l', что и требовалось доказать.

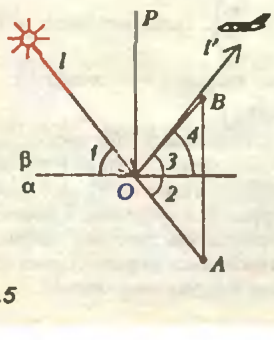


Рис.5

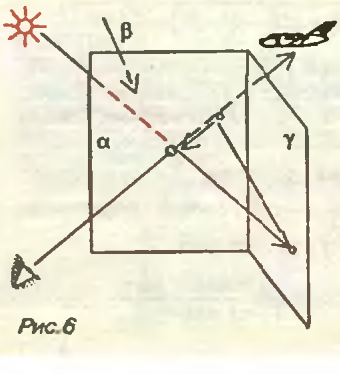


Рис.6

Вернемся к нашему «путешествию». Когда вы совмещаете отраженный зайчик *2* с отверстием *O*, не теряя самолета из виду, вы начинаете как бы смотреть вслед отраженному лучу и вместе с ним «догонять» летящий в небе самолет. Но могут быть и неудачи. Если, например, самолет и солнце находятся на одной высоте над горизонтом, то при горизонтальном положении СЗ ничего не получится (убедитесь в этом самостоятельно). Но стоит только развернуть зеркало на девяносто градусов — перевести его в вертикальное положение (рис.6), и «путешествие в солнечном луче» можно продолжать.

Итак, за дело. Изготовьте СЗ и проведите как можно больше опытов с ним, солнцем и «поисковым самолетом». Желаем удачи!

Тригонометрические подстановки

Р.АЛЕКСЕЕВ, Л.КУРЛЯНДЧИК

Рассмотрим следующую задачу: *среди любых семи различных чисел найдутся два числа x и y такие, что*

$$0<\frac{x-y}{1+xy}<\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_7$ – данные числа. Для любого числа a найдется число α из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ такое, что $a=\operatorname{tg}\alpha$. Пусть $a_1=\operatorname{tg}\alpha_1$, $a_2=\operatorname{tg}\alpha_2, \ldots, a_7=\operatorname{tg}\alpha_7$. Среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_7$ найдутся два, разность между которыми меньше чем $\frac{\pi}{6}$ (подумайте, почему). Пусть это числа α и β, причем $\alpha>\beta$. Тогда

$$0<\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)<\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Значит, числа $x=\operatorname{tg}\alpha$, $y=\operatorname{tg}\beta$ – искомые.

Решение задачи стало очевидным после удачно выбранной тригонометрической подстановки. Суть тригонометрической подстановки состоит именно в том, что переменные, фигурирующие в условии задачи, рассматриваются как значения некоторых тригонометрических функций. При этом функции следует подобрать так, чтобы запись была возможно более компактной.

О тригонометрических подстановках и пойдет речь в этой статье.

Если $x^2+y^2=1$

Если в задаче встречается равенство $x^2+y^2=1$, то часто бывает полезно сделать замену $x=\sin\alpha$, $y=\cos\alpha$.

Задача 1. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ 4xy\left(2y^2-1\right)=1.\end{cases}$$

Сделав замену $x=\sin\alpha$, $y=\cos\alpha$ $(0\le\alpha<2\pi)$, получаем $\sin 4\alpha=1$. Значит, $4\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, где $k=0, 1, 2, 3$. Теперь уже нетрудно выписать ответ:

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)\right\};\left\{\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\frac{-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\right\};$$

$$\left\{\left(\frac{-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)\right\};\left\{\left(\frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\right\}.$$

Как видите, эти замены «убили» задачу. В то время как решение, не использующее тригонометрию, значительно сложнее.

Упражнения

1. Числа a, b, c, d таковы, что $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, $ac+bd=0$. Чему равно $ab+cd$?

2. Среди всех решений системы

$$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z^2+t^2=9,\\ xt+yz=6\end{cases}$$

найдите такие, при которых выражение $x+z$ принимает наибольшее значение.

Если $xy+yz+zx=1$

Докажем, что если числа x, y, z удовлетворяют равенству $xy+yz+zx=1$, то найдутся числа α, β, γ такие, что $x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $y=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $z=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ и $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Действительно, положим $x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $y=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ $(-\pi<\alpha,\beta<\pi)$. Так как $z=\frac{1-xy}{x+y}$ (заметим, что $x+y\ne0$), то $z=\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}=$ $=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Остается положить $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$.

Задача 2. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases}3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4\left(y+\frac{1}{y}\right)=5\left(z+\frac{1}{z}\right),\\ xy+yz+zx=1.\end{cases}$$

Так как

$$\frac{x}{3\left(1+x^2\right)}=\frac{y}{4\left(1+y^2\right)}=\frac{z}{5\left(1+z^2\right)},$$

то числа x, y, z имеют одинаковые знаки, причем если (x, y, z) – решение системы, то и $(-x, -y, -z)$ – ее решение. Поэтому достаточно отыскать только положительные решения. Сделав замену $x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $y=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $z=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ $(0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$; $\alpha+\beta+\gamma=\pi)$, получим

$$\frac{\sin\alpha}{3}=\frac{\sin\beta}{4}=\frac{\sin\gamma}{5}.$$

Из теоремы синусов теперь следует, что α, β, γ – углы треугольника со сторонами, пропорциональными числам 3, 4, 5. Это – прямоугольный треугольник, у которого $\gamma=\frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\beta=\frac{4}{5}$, т.е. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=1$. Поэтому ответ в данной задаче –

$$\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right)\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{2},-1\right)\right\}.$$

Упражнения

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}xy+yz+zx=1,\\ \frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{2y}{1+y^2}=\frac{1-z^2}{1+z^2}.\end{cases}$$

4. Положительные числа x, y, z таковы, что $xy+yz+zx=1$. Докажите неравенство

$$\frac{2x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{2y\left(1-y^2\right)}{\left(1+y^2\right)^2}+\frac{2z\left(1-z^2\right)}{\left(1+z^2\right)^2}\le$$

$$\le\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}.$$

Неравенства

Покажем, как используются тригонометрические подстановки для доказательства некоторого типа неравенств.

Задача 3. *a, b, c, d – положительные числа. Докажите неравенство*

$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\le\sqrt{(a+d)(b+c)}.$$

Перепишем неравенство в виде

$$\sqrt{\frac{a}{a+d}\cdot\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{b+c}\cdot\frac{d}{a+d}}\le1.$$

Положим $\frac{a}{a+d}=\sin^2\alpha$, $\frac{b}{b+c}=\sin^2\beta$ $\left(0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда неравенство примет вид $\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\le1$, т.е. $\cos(\alpha-\beta)\le1$.

Как видите, здесь тригонометрическая подстановка позволила избавиться от радикалов и получить более простое выражение. И в следующей задаче мы также при помощи тригонометрической замены избавимся от радикалов и получим более простые выражения.

Задача 4. *a, b, c — положительные числа, причем c — наименьшее из них. Докажите неравенства*

$$\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)\sqrt{ab}\le\sqrt{(a+c)(b+c)}+$$
$$+\sqrt{(a-c)(b-c)}\le 2\sqrt{ab}.$$

Перепишем неравенства в виде

$$\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\le\sqrt{\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{c}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)}\le 2.$$

Положим

$$\frac{c}{a}=\sin 2\alpha,\ \frac{c}{b}=\sin 2\beta\ \left(0<\alpha,\beta\le\frac{\pi}{4}\right).$$

Неравенства принимают вид

$$\sin2\alpha+\sin2\beta\le(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta)+$$
$$+(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\beta-\sin\beta)\le 2,$$

или

$$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\le 2\cos(\alpha-\beta)\le 2.$$

Заметим, что правое неравенство этой задачи,

$$\sqrt{(a+c)(b+c)}+\sqrt{(a-c)(b-c)}\le 2\sqrt{ab},$$

— простое следствие неравенства задачи 3.

Упражнение 5. a, b, c — положительные числа, причем c — наименьшее из них. Докажите неравенства

$$\left|\frac{c}{b}-\frac{c}{a}\right|\sqrt{ab}\le\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}.$$

Уравнения

Тригонометрические подстановки также используются при решении уравнений. Разберем два примера.

Задача 5. *Решите уравнение*

$$\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x.$$

Положим $x=\cos\alpha$ $(0\le\alpha\le\pi)$. Получаем $\sin\alpha=\cos3\alpha$, или

$$\cos3\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=0.$$

Отсюда

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Значит, $\alpha=\frac{\pi}{8}$, или $\alpha=\frac{5}{8}\pi$, или $\alpha=\frac{3}{4}\pi$. Так как

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2},$$

$$\cos\frac{5}{8}\pi=-\sqrt{\frac{1+\cos\frac{5}{4}\pi}{2}}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2},$$

$$\cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt2}{2},$$

то множество

$$\left\{-\frac{\sqrt2}{2};\ \frac{-\sqrt{2-\sqrt2}}{2};\ \frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}\right\}$$

является ответом задачи.

Задача 6. *Решите уравнение*

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}.$$

Отметим, что $x>1$. Положим $x=\frac{1}{\sin\alpha}$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. Уравнение перепишется в виде $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{35}{12}$. Обозначим $\sin\alpha+\cos\alpha=a$, $\sin\alpha\cos\alpha=b$. Решая систему

$$\begin{cases}12a=35b,\\ a^2-1=2b,\end{cases}$$

получаем $a=\frac{7}{5}$, $b=\frac{12}{25}$.

Значит, числа $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ являются корнями квадратного уравнения $t^2-\frac{7}{5}t+\frac{12}{25}=0$, т.е. либо

$$\begin{cases}\sin\alpha=\frac{3}{5},\\ \cos\alpha=\frac{4}{5},\end{cases}$$

либо

$$\begin{cases}\sin\alpha=\frac{4}{5},\\ \cos\alpha=\frac{3}{5}.\end{cases}$$

Итак, ответ: $\left\{\frac{5}{3};\frac{5}{4}\right\}$.

Упражнение 6. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1-|x|}{2}}=2x^2-1.$$

Системы

Тригонометрические подстановки часто бывают полезны при решении циклических систем уравнений. Разберем соответствующий пример.

Задача 7. *Сколько решений имеет система уравнений*

$$\begin{cases}x+3y=4y^3,\\ y+3z=4z^3,\\ z+3x=4x^3?\end{cases}$$

Перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases}x=4y^3-3y,\\ y=4z^3-3z,\\ z=4x^3-3x.\end{cases}$$

Докажем, что все числа x, y, z по абсолютной величине не превосходят единицы. Действительно, если x — максимальное из чисел x, y, z и $x>1$, то $z=4x^3-3x>x$. Пришли к противоречию. Если же предположить, что число x минимальное и $x<-1$, то $z=4x^3-3x<x$. Опять же пришли к противоречию. Итак, $-1\le x,y,z\le 1$ и мы можем сделать замену $x=\cos\alpha$ $(0\le\alpha\le\pi)$. Тогда $z=\cos3\alpha$, $y=\cos9\alpha$, $x=\cos27\alpha$. Теперь ясно, что число решений исходной системы равно числу решений уравнения $\cos\alpha=\cos27\alpha$ на промежутке $[0,\pi]$. Легко видеть, что этих решений ровно 27:

$$\alpha=\frac{k\pi}{13}\ (k=0,1,2,\ldots,13);$$

$$\alpha=\frac{k\pi}{14}\ (k=0,1,2,\ldots,13).$$

Упражнение 7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2x+x^2y=y,\\ 2y+y^2z=z,\\ 2z+z^2x=x.\end{cases}$$

Рекуррентные последовательности

Наконец, мы дошли до последней и наиболее содержательной части нашей экскурсии в тригонометрические подстановки. Разберем две трудные задачи, которые сводятся к рекуррентным последовательностям. Решение этих последовательностей мы получим при помощи тригонометрических подстановок.

Задача 8. *$a_1, a_2, \ldots, a_n$ — вещественные числа такие, что $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1$. Найдите наибольшее значение выражения $a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n$.*

Будем рассматривать такие числа C, для которых неравенство

$$a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n\le C\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)$$

справедливо для любых вещественных чисел a_1, a_2, ..., a_n. Наименьшее из таких C и будет ответом нашей задачи. Во-первых, искомое значение C не превосходит единицы, поскольку

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2-a_1a_2-a_2a_3-\ldots-a_{n-1}a_n=$$
$$=\frac{1}{2}\left(a_1^2+(a_2-a_1)^2+\ldots+(a_{n-1}-a_n)^2+a_n^2\right)\ge 0.$$

Преобразуем выражение

$$C\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)-a_1a_2-a_2a_3-\ldots-a_{n-1}a_n,$$

последовательно выделяя квадраты по

переменным a_1, a_2, ..., a_{n-1}. Получим выражение вида

$$p_1\left(a_1-\frac{1}{2p_1}a_2\right)^2+p_2\left(a_2-\frac{1}{2p_2}a_3\right)^2+\ldots$$
$$\ldots+p_{n-1}\left(a_{n-1}-\frac{1}{2p_{n-1}}a_n\right)^2+p_na_n^2.$$

Легко понять, что $p_1=C$ и $p_{n+k}=C-\frac{1}{4p_k}$ $(k=1,2,\ldots,n-1)$. Полученное выражение неотрицательно при всех значениях a_1, a_2, ..., a_n в том и только в том случае, когда все числа p_1, p_2, ..., p_n неотрицательны. Итак, задача свелась к нахождению минимального значения C, для которого все члены последовательности p_1, p_2, ..., p_n неотрицательны.

Так как $0<C\le 1$, то мы можем положить $C=\cos\alpha$, где $0\le\alpha<\frac{\pi}{2}$. Тогда

$$p_2=\cos\alpha-\frac{1}{4\cos\alpha}=\frac{4\cos^2\alpha-1}{4\cos\alpha}=$$
$$=\frac{2\cos\alpha\sin 2\alpha-\sin\alpha}{2\sin 2\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{2\sin 2\alpha}.$$

Далее,

$$p_3=\cos\alpha-\frac{\sin 2\alpha}{2\sin 3\alpha}=$$
$$=\frac{2\sin 3\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin 3\alpha}=\frac{\sin 4\alpha}{2\sin 3\alpha}.$$

Легко по индукции доказывается, что $p_k=\frac{\sin(k+1)\alpha}{2\sin k\alpha}$ $(k=1,\ldots,n)$. Поэтому неотрицательность чисел p_1, p_2, ..., p_n равносильна неотрицательности чисел $\sin\alpha$, $\sin 2\alpha$, ..., $\sin(n+1)\alpha$. Значит, $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ и искомое значение C равно $\cos\frac{\pi}{n+1}$.

Задача 9. *x_1, x_2, ..., x_n — положительные числа, пусть A — наименьшее из чисел x_1, $x_2+\frac{1}{x_1}$, $x_3+\frac{1}{x_2}$, ..., $x_n+\frac{1}{x_{n-1}}$, $\frac{1}{x_n}$, B — наибольшее из этих чисел. Докажите, что наименьшее возможное значение B равно наибольшему значению A, и найдите это значение.*

Начнем с рассмотрения ситуации

$$x_1=x_2+\frac{1}{x_1}=x_3+\frac{1}{x_2}=\ldots$$
$$\ldots=x_n+\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{1}{x_n}.$$

Тогда числа x_1, x_2, ..., x_n удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению: $x_{k+1}=x_1-\frac{1}{x_k}$ $(k=1,\ldots,n-1)$. Похожее соотношение уже встречалось в предыдущей задаче. Оно также решается при помощи тригонометрической подстановки.

Докажем сначала, что $x_1<2$. Действительно, предположив, что $x_1\ge 2$, последовательно получим, что $x_2\ge 1$, $x_3\ge 1$, ..., $x_n\ge 1$, и тогда невозможно равенство $x_1=\frac{1}{x_n}$.

Теперь мы можем положить $x_1=2\cos\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. Как и в предыдущей задаче, по индукции легко доказывается, что $x_k=\frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin k\alpha}$ $(1\le k\le n)$. Из условия $x_1=\frac{1}{x_n}$ получаем, что

$$2\cos\alpha=\frac{\sin n\alpha}{\sin(n+1)\alpha}.$$

Отсюда $\sin(n+2)\alpha=0$, т.е. $\alpha=\frac{\pi}{n+2}$.

Докажем теперь, что наибольшее значение A и наименьшее значение B равны $2\cos\frac{\pi}{n+2}$. Достаточно доказать неравенства $A\le 2\cos\frac{\pi}{n+2}\le B$.

Пусть все числа x_1, $x_2+\frac{1}{x_1}$, $x_3+\frac{1}{x_2}$, ..., $x_n+\frac{1}{x_{n-1}}$, $\frac{1}{x_n}$ больше чем $2\cos\frac{\pi}{n+2}$. В таком случае последовательно получаем следующие неравенства:

$$x_2>\frac{\sin\frac{3\pi}{n+2}}{\sin\frac{2\pi}{n+2}},\quad x_3>\frac{\sin\frac{4\pi}{n+2}}{\sin\frac{3\pi}{n+2}},\ \ldots$$
$$\ldots x_n>\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{n+2}}{\sin\frac{n\pi}{n+2}},$$

но тогда $\frac{1}{x_n}<2\cos\frac{\pi}{n+2}$.

Итак, мы доказали неравенство $A\le 2\cos\frac{\pi}{n+2}$. Аналогично доказывается второе неравенство $2\cos\frac{\pi}{n+2}\le B$.

Упражнение 8. a_1, a_2, ..., a_n — вещественные числа, такие, что $a_1=0$, $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1$. Найдите наименьшее значение выражения

$$(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+\ldots+(a_{n-1}-a_n)^2.$$

Итак, наш рассказ о тригонометрических подстановках подошел к концу. В каких же случаях выгодно пользоваться этим приемом, а в каких нет? Ответить на этот вопрос поможет лишь ваш личный опыт, обогатить который можно только решением различных задач. В заключение предлагаем решить несколько упражнений, которые могут стать вашим «начальным капиталом».

Упражнения

9. a, b — положительные числа, причем $a>b$. Докажите неравенство

$$\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{2ab-b^2}\ge a.$$

10. a, b, c, d — положительные числа, причем d — наибольшее из них. Докажите неравенство

$$\sqrt{a(d-b)(d-c)}+\sqrt{b(d-a)(d-c)}+$$
$$+\sqrt{c(d-a)(d-b)}\le\sqrt{d^3}+\sqrt{abc}.$$

11. Числа x, y, z таковы, что $xy+yz+zx=1$. Докажите, что

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=$$
$$=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

12. Сколько корней на промежутке $[0,1]$ имеет уравнение

$$8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1?$$

13. Решите уравнение

$$\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}.$$

14. Последовательность чисел h_n задана условиями $h_1=\frac{1}{2}$ и $h_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-h_n^2}}{2}}$ для каждого n. Докажите, что сумма любого количества чисел h_n не превосходит 1,03.

15. Существует ли множество, состоящее из 100 вещественных чисел, обладающее следующим свойством: вместе с каждым числом x оно содержит число $2x^2-1$?

16. Пусть

$$\rho(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}.$$

Докажите, что для любых чисел a, b, c выполнено неравенство

$$\rho(a,c)\le\rho(a,b)+\rho(b,c).$$

17. Последовательность x_n задается условиями $x_1=2$, $x_{n+1}=\frac{2+x_n}{1-2x_n}$ для каждого n. Докажите, что

а) $x_n\ne 0$ (при всех n),

б) эта последовательность непериодическая.

НОВОСТИ ИЗ МИРА ГОЛОВОЛОМОК

26 — 27 ноября 1994 года в Москве во Дворце творчества детей и юношества состоялась первая встреча любителей и коллекционеров головоломок — членов клуба «Диоген». Клуб организует энтузиастов из 24 городов России, Украины и Латвии, два года издает свою собственную газету, имеет международные связи.

Желающие вступить в клуб «Диоген» могут написать в «Квант» или по контактному адресу: *300096 Тула, 18-й Проезд, д.83А, кв.72, Рыбинскому В.Н.*

Когда кипит вода?

В. БЕЛОНУЧКИН

На первый взгляд, ответ на вопрос, сформулированный в заголовке, кажется очевидным. Ведь по определению 100 градусов по шкале Цельсия — это точка кипения воды. Но не забудьте добавить — при нормальном давлении. В Москве же, к примеру, нормальное давление $p_0 = 760$ мм рт.ст. бывает довольно редко. И даже в течение дня атмосферное давление в той же Москве порой меняется аж на 20 мм. А это соответствует изменению температуры кипения на 0,7 °С (или, что то же самое, на 0,7 К).

Так когда же обычно кипит вода в Москве? Обсудим это на конкретной задаче. Отметим, что условия этой и последующих задач заимствованы, с некоторыми изменениями, из билетов вступительных экзаменов в Московский физико-технический институт, в основном последних лет.

Задача 1. *Среднее атмосферное давление в Москве составляет p = 746 мм рт.ст. Какова средняя температура кипения воды в столице России?*

Вообще говоря, давление и температура кипения связаны довольно сложной зависимостью. Но, как говорят математики, «в малом все линейно». Значит, при малых изменениях можно считать отклонения давления и температуры от нормальных значений пропорциональными друг другу. И если на 20 мм приходится 0,7 °С, то на 14 мм придется чуть меньше 0,5 °С, т.е. вода в Москве кипит в среднем при 99,5 °С. (Аккуратный расчет дает цифру 99,51 °С.)

Почему же точка кипения зависит от давления? Начнем издалека.

Всегда, когда есть свободная поверхность жидкости, происходит процесс вылета молекул из жидкости. Однако при этом возможно (почти всегда так и бывает), что имеется и обратный процесс попадания молекул из газообразной фазы (пара) в жидкость. Если эти два процесса взаимно компенсируются, то количество жидкости не меняется — существует динамическое равновесие. Оно наступает тогда, когда давление паров жидкости равно насыщенному.

Если давление паров меньше насыщенного, происходит испарение жидкости, т.е. уменьшение ее количества. Если же давление выше насыщенного, превалирует обратный процесс конденсации паров, и количество жидкости растет.

Когда суммарное давление над поверхностью жидкости (это может быть и только давление паров, и сумма давлений паров и воздуха) меньше давления насыщенных паров, может происходить кипение — испарение не только с поверхности, а и во всем объеме жидкой фазы. Например, в возникающих возле дна сосуда пузырьках пара давление больше внешнего, и они не схлопываются, а растут, отрываются от дна, всплывают к поверхности, там лопаются и производят характерный для кипения шум.

Итак, подчеркнем еще раз: жидкость кипит тогда, когда равновесное для данной температуры давление ее паров — давление насыщенных паров жидкости — превышает суммарное внешнее давление. А тот факт, что давление насыщенных паров растет с ростом температуры, объяснить нетрудно. Действительно, растет число молекул жидкости, имеющих достаточно высокую энергию, чтобы вылететь наружу; должно расти число возвращающихся молекул, а значит — и давление паров жидкости. Посторонние газы могут влиять только на характер процесса — будет это поверхностное испарение или бурное кипение, на само равновесие они не влияют.

Испарение и конденсация — одни из примеров так называемых фазовых переходов. В данном случае это переход из жидкой фазы в газовую и обратно. Принципиальное различие между фазами определяется характером взаимодействия молекул. Чисто внешне газовая и конденсированная фазы (конденсированная фаза может представлять собой жидкость или твердое тело) отличаются в первую очередь плотностью. Рассмотрим пример.

Задача 2. *Переносной газовый баллон объемом $V = 1$ дм^3 заполнен пропаном — C_3H_8 — при температуре $t = 17$ °С. Давление насыщенных паров пропана при такой температуре равно $p = 8 \cdot 10^5$ Па (т.е. 8 атм). Всего в баллоне оказалось $m = 300$ г пропана. Какое количество пропана находится в газообразном состоянии, если плотность жидкого пропана $\rho = 440$ кг/м^3?*

Жидкий пропан не заполняет весь баллон, значит, он будет испаряться, пока давление не достигнет 8 атм. Плотность газообразного пропана можно рассчитать по уравнению состояния идеального газа (при заданном давлении это будет достаточно хорошим приближением). В результате баланс массы принимает вид

$$m = m_г + m_ж = m_г + \rho\left(V - \frac{m_г RT}{Mp}\right),$$

где M = 44 г/моль, $T = 290$ К. Отсюда

$$m_г = \frac{\rho V - m}{\rho RT/(Mp) - 1} = 5 \text{ г}.$$

Заметим, что $\rho RT/(Mp) = 30$ есть как раз отношение плотностей жидкого и газообразного пропана. При давлениях, близких к атмосферному, эта цифра обычно приближается к тысяче, т.е. сравнимые массы газа и жидкости занимают в равновесии несопоставимые объемы. Это обстоятельство нередко используется для упрощения решения задачи, например — такой.

Задача 3. *В камеру объемом $V = 1$ дм^3, сообщающуюся с воздухом при температуре $t = 20$ °С и давлении $p_0 = 10^5$ Па, бросают кусочек сухого льда массой $m = 0,5$ г. Камеру быстро герметически закрывают. Определите давление в камере после установления равновесия при той же температуре. Давление насыщенного пара углекислоты (при 20 °С) равно $p_н = 5,65 \cdot 10^6$ Па.*

Испарившаяся углекислота создает давление

$$p_1 = \frac{mRT}{MV} = 2,8 \cdot 10^4 \text{ Па},$$

где M = 44 г/моль, $T = 293$ К.

Добавляем атмосферное давление p_0 и получаем ответ —

$$p = p_1 + p_0 = 1,28 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Обратим внимание на два момента. Во-первых, мы считали, что давление воздуха в атмосфере не меняется. В действительности из-за «пропажи» твердого вещества объем, занимаемый воздухом, немного увеличится (это было бы нетрудно подсчитать, если бы была известна плотность сухого льда). Но мы, молча подразумевая, что плотность льда гораздо больше плотности газа, пренебрегли объемом, первоначально занимаемым кусочком сухого льда, что, конечно, разумно. Во-вторых, полученное нами значение давления углекислого газа меньше давления насыщенных паров при соответствующей температуре, а значит, действительно, весь сухой лед испарится, и расчет с этой точки зрения проведен правильно. Конечно, так бывает не всегда.

И вот пример.

Задача 4. *В сосуд объемом $V = 10$ дм^3 налили воду в количестве $m = 10$ г. При этом давление и температура в комнате равны $p_0 = 10^5$ Па и $t_0 = 27$ °С. Сосуд герметично закрыли и нагрели до температуры $t = 100$ °С. Каким стало давление в сосуде?*

Проведем расчет давления водяных паров, как в предыдущей задаче, и получим

$$p_{в} = 1{,}38 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Но при температуре 373 К (100 °С) давление насыщенных паров воды равно «лишь» $p_0 = 10^5$ Па. Значит, вся вода не сможет испариться, и давление водяных паров будет равно как раз p_0. Добавив к этой величине изменившееся в отношении $373/300$ давление воздуха, получим окончательно

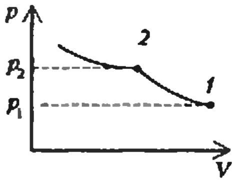
$$p = p_0 + \frac{373}{300} p_0 = 2{,}24 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Заметим, что в задаче 1 мы должны были проводить расчет достаточно тщательно, и различие между 1 атм и 10^5 Па играло роль. В остальных задачах мы следим не за малыми изменениями, а за самой величиной давления, поэтому приближение 1 атм = 10^5 Па не представляется слишком грубым. Однако продолжим разговор о задаче 4.

Если мы теперь будет увеличивать объем сосуда, то поначалу давление паров воды будет оставаться постоянным и равным 1 атм. Значит ли это, что пары не подчиняются уравнению состояния идеального газа? И да, и нет. Сами по себе пары подчиняются уравнению идеального газа, ему не подчиняется двухфазная система: насыщенные пары в равновесии с жидкостью. Вот когда объем сосуда достигнет при неизменной температуре 13,8 дм^3 (подумайте, откуда возникла эта величина), вся жидкость испарится, и дальше давление будет падать обратно пропорционально объему, как и полагается «приличному» идеальному газу. До этого объема давление не падало, потому что испарялась жидкость и возрастала масса пара. Можно сказать, что пар в целом (но не как отдельная порция) вел себя как идеальный газ, давление оставалось постоянным, а выполнение уравнения состояния при увеличении объема обеспечивалось возрастанием массы газа.

Рассмотрим в связи с этими соображениями изотерму смеси газов.

Задача 5. *Некоторую порцию влажного воздуха при давлении p_1 поместили в сосуд и стали изотермически уменьшать объем (см. рисунок). Определите относительную влажность этого воздуха.*



Излом в точке *2* может быть объяснен единственным способом: до этого водяные пары были ненасыщенными, их давление росло так же, как давление сухого воздуха и как суммарное давление в сосуде. Но вот оно выросло в p_2/p_1 раз, и сжимаемость смеси резко, скачком увеличилась. По-видимому, началась конденсация воды — давление ее паров уже не растет, а весь прирост общего давления объясняется ростом давления сухого воздуха. Из этого следует, что давление паров воды в исходной смеси составляло p_1/p_2 от давления насыщенных паров, т.е. относительная влажность воздуха была

$$\varphi = \frac{p_1}{p_2} 100\%.$$

При решении всех рассмотренных задач мы считали, что весь воздух, соприкасающийся с водой, находится над ней. В действительности некоторое количество воздуха может быть растворено в воде. Но поскольку растворимость воздуха невелика, пренебрежение ею представляется разумным. Иначе обстоит дело с углекислым газом.

Задача 6. *При изготовлении в домашних условиях «газировки» углекислый газ в количестве $m = 10$ г закачивается собственным давлением из зарядного баллончика в сифон. Свободный от воды объем сифона составляет $V = 0{,}2$ дм^3. При температуре $t = 24$ °С (после частичного растворения углекислоты в воде) устанавливается давление $p = 4$ атм. Какая часть углекислоты растворилась?*

Перед подключением баллончика сифон с водой был открыт, значит, вначале воздух там находится при атмосферном давлении 1 атм. Остальные 3 атм давления создаются углекислым газом. Нетрудно подсчитать, что для этого потребуется 1,1 г газа. Оставшиеся 8,9 г, очевидно, и находятся в растворенном состоянии.

Упражнения

1. При температуре $t = 27$ °С давление у основания Останкинской башни равно $p_1 = 10^5$ Па. При какой температуре варят суп в ресторане «Седьмое небо», расположенном на высоте $H = 330$ м?

2. Баллон объемом $V = 5$ дм^3 до отказа заполнен жидким пропаном. Какова будет масса газообразного пропана в баллоне, когда израсходуется 80% топлива? Температура $t = 17$ °С, свойства пропана при этой температуре приведены в задаче 2 в тексте статьи.

3. Сосуд, заполненный воздухом при атмосферном давлении, разделен на две части подвижной перегородкой. В меньшую часть сосуда впрыснули жидкость, давление насыщенных паров которой при комнатной температуре равно $p_{н} = 3{,}5$ атм. Через некоторое время, когда еще не вся жидкость испарилась, перегородка перестала двигаться. Объем малой части сосуда при этом увеличился вдвое. Какой относительный объем занимала эта часть в начале опыта? Объемом жидкости пренебречь.

4. Влажный воздух находится в цилиндре под поршнем. Изотермическое увеличение давления в $\alpha = 2$ раза уменьшает объем цилиндра в $\beta = 2{,}5$ раза. Какую часть конечного давления составляет давление пара, если начальная относительная влажность воздуха $\varphi = 64\%$?

Однородные уравнения

Л. РЫЖКОВ, Ю. ИОНИН

В школьном курсе математики по крайней мере трижды встречается понятие «однородное уравнение» («однородная система уравнений»). Так, при решении систем линейных уравнений однородной называли систему

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0. \end{cases}$$

Когда рассматривались системы уравнений второй степени, говорилось, что система уравнений

$$\begin{cases} 14x^2 - 5xy + 3y^2 = 16, \\ 6x^2 - xy + y^2 = 8 \end{cases}$$

равносильна системе уравнений, одно из которых однородное, а второе является одним из уравнений исходной системы. При решении тригонометрических

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 9 за 1975 год.

уравнений однородными назывались уравнения

$$\sin x - \cos x = 0,$$

$$\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0.$$

Что же объединяет приведенные выше примеры и как понимать термин «однородное уравнение»?

Многочлен $f(u, v)$ от двух переменных называют однорядным многочленом степени n, если все его одночлены имеют степень n. Например,

$$f(u,v) = 2u^2 - 7uv + 9v^2$$

— однородный многочлен второй степени, а

$$f(u,v) = u^3 - 15u^2v + 5v^3$$

— однородный многочлен третьей степени.

Уравнение $f(u, v) = 0$ называют однородным уравнением k-й степени, если $f(u, v)$ — однородный многочлен степени k.

Заметим, что понятие однородности распространяется и на уравнения с большим числом неизвестных. Например, мы скажем, что уравнение $x^3 + 3x^2y + 3xyz + z^3 = 0$ — однородное уравнение третьей степени относительно неизвестных x, y и z.

Рассмотрим однородное уравнение n-й степени с двумя неизвестными x и y:

$$f(x,y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + $$
$$+ a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_ny^n = 0. \quad (1)$$

Будем считать, что $a_0 \neq 0$.

Случай, когда $a_0 = 0$, сводится к рассматриваемому нами следующим образом: если мы вынесем за скобку y в наименьшей встречающейся степени, то в скобках будет стоять однородный многочлен с ненулевым старшим коэффициентом. Например, уравнение $x^4y^2 + 3xy^5 - 7y^6 = 0$ принимает вид $y^2(x^4 + 3xy^3 - 7y^4) = 0$, после чего остается рассмотреть равносильную исходному уравнению совокупность уравнений $y^2 = 0$, $x^4 + 3xy^3 - 7y^4 = 0$.

Заметим, что пара $x = 0$, $y = 0$ является решением уравнения (1), а пара $x = x_0$, $y = 0$ при $a_0 \neq 0$, $x_0 \neq 0$ решением уравнения (1) не является. Разделив обе части уравнения (1) на y^n, мы получим уравнение n-й степени с одним неизвестным $t = x/y$:

$$a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_{n-1}t + a_n = 0. \quad (2)$$

Этим свойством однородных уравнений мы воспользуемся при решении приведенных ниже задач.

Выясним, что представляет собой множество точек плоскости, координаты x, y которых удовлетворяют уравнению (1). Прежде всего, в это множество входит начало координат $O(0, 0)$. Затем, если $a_0 = 0$, то появляется решение $y = 0$, определяющее ось абсцисс. А корни t_1, t_2, ..., t_k уравнения (2) определяют прямые $x = t_1y$, $x = t_2y$, ..., $x = t_ky$, проходящие через начало координат (на рисунке 1, например, $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, $t_3 = 2$).

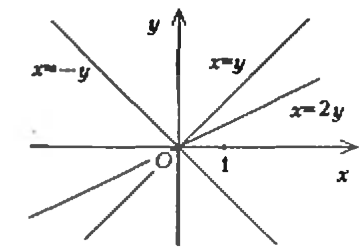


Рис. 1

Задача 1. *Из пункта А в пункт Б выехала машина. Одновременно навстречу ей из пункта Б выехал велосипедист. Через три минуты после встречи машина мгновенно поворачивает, едет за велосипедистом и, догнав его, снова мгновенно поворачивает и прибывает в пункт Б. Если бы машина мгновенно повернула через 1 минуту после встречи, а велосипедист после встречи увеличил бы скорость в 15/7 раза, то машина затратила бы на всю дорогу то же самое время. Найдите отношение скоростей велосипедиста и машины.*

Пусть x (км/мин) — скорость машины, а y (км/мин) — скорость велосипедиста. Заметим, что на движение машины от пункта $А$ до первой встречи с велосипедистом в первом и втором случае уходит одно и то же время и что на движение машины от места первой встречи с велосипедистом до пункта $Б$ в обоих случаях также уходит одинаковое время. Поэтому одно и то же время занимает движение машины от момента первой встречи с велосипедистом до второго прохождения места их первой встречи. Подсчитаем это время в каждом случае.

I. После встречи с велосипедистом машина ехала 3 мин в направлении пункта $Б$. На обратную дорогу до места встречи ей потребуется еще 3 мин. Велосипедист за это время удалится от места встречи на $6y$ км. Машина будет его догонять со скоростью $(x - y)$ км/мин, на это у нее уйдет $\frac{6y}{x-y}$ мин. На обратную дорогу до места встречи у нее уйдет также $\frac{6y}{x-y}$ мин, а всего

$$3 + 3 + 2\frac{6y}{x-y} = \left(6 + \frac{12y}{x-y}\right) \text{ мин.}$$

II. Проводя аналогичные рассуждения, получим

$$1 + 1 + \frac{2\cdot\frac{15}{7}y}{x - \frac{15}{7}y} + \frac{2\cdot\frac{15}{7}y}{x - \frac{15}{7}y} =$$
$$= \left(2 + \frac{60y}{7x - 15y}\right) \text{ мин.}$$

Приравнивая найденные выражения, получаем уравнение

$$6 + \frac{12y}{x-y} = 2 + \frac{60y}{7x - 15y},$$

откуда

$$7x^2 - 16xy - 15y^2 = 0.$$

Это — однородное уравнение второй степени относительно x и y. Полагая $t = x/y$ (отношение скоростей машины и велосипедиста) и решая уравнение $7t^2 - 16t - 15 = 0$, находим $t = 3$ (отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи).

В этой задаче у нас было одно уравнение с двумя независимыми переменными. Такой случай встречается довольно редко, обычно в задачах переменные связаны некоторыми дополнительными соотношениями.

Задача 2. *Решите уравнение*

$$20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0.$$

Введем новые неизвестные $u = \frac{x-2}{x+1}$, $v = \frac{x+2}{x-1}$. Получим уравнение $20u^2 - 5v^2 + 48uv = 0$, однородное второй степени относительно u и v. Делим обе его части на v^2 (легко видеть, что в случае $u = v = 0$ решений нет) и полагаем $\frac{u}{v} = t$. Получаем уравнение $20t^2 + 48t - 5 = 0$ с корнями $t_1 = -\frac{5}{2}$, $t_2 = \frac{1}{10}$.

В первом случае $\frac{u}{v} = -\frac{5}{2}$; $\frac{x-2}{x+1} : \frac{x+2}{x-1} = -\frac{5}{2}$; $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} = -\frac{5}{2}$, $7x^2 + 9x + 14 = 0$, это уравнение действительных корней не имеет.

Во втором случае $\frac{u}{v} = \frac{1}{10}$; $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} = \frac{1}{10}$; $3x^2 - 11x + 6 = 0$; $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{2}{3}$.

Задача 3. *Решите уравнение*

$$2\left(x^2+x+1\right)^2-7(x-1)^2=13\left(x^3-1\right).$$

Положим $u=x-1$, $v=x^2+x+1$. Тогда уравнение примет вид $2v^2-7u^2=13uv$. В случае $v=u=0$ решений нет. Разделим обе части уравнения на v^2 и введем новое неизвестное $t=\frac{u}{v}$, получим уравнение $7t^2+13t-2=0$ с корнями $t_1=1/7$, $t_2=-2$.

В первом случае $\frac{x-1}{x^2+x+1}=\frac{1}{7}$, $x^2-6x+8=0$, $x_1=2$, $x_2=4$; во втором $\frac{x-1}{x^2+x+1}=-2$, $2x^2+3x+1=0$, $x_3=-1$, $x_4=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=-1$, $x_4=-\frac{1}{2}$.

Задача 4. *Решите уравнение*

$$x^2+2x+15=2x\sqrt{2x+15}. \qquad (3)$$

Введем еще одно неизвестное $u=\sqrt{2x+15}$. Получим однородное уравнение $x^2+u^2=2xu$. Его можно решать как обычно, а можно представить в виде $(x-u)^2=0$, откуда $x=u$. Из уравнения $x=\sqrt{2x+15}$ следует $x^2-2x-15=0$, $x_1=-3$, $x_2=5$. Значение $x=-3$ не удовлетворяет уравнению (3), а $x=5$ удовлетворяет.

Задача 5. *Решите уравнение*

$$2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}.$$

Если положить $u=x+1$, $v=x-1$, то получится уравнение, которое можно было бы назвать «однородным степени 1/3», если бы было дано соответствующее определение. Чтобы не иметь дела с дробными степенями, положим

а) $u=\sqrt[6]{x+1}$, $v=\sqrt[6]{x-1}$, если $x\ge 1$;

б) $u=\sqrt[6]{-x-1}$, $v=\sqrt[6]{-x+1}$, если $x\le -1$.

В первом случае приходим к уравнению $2u^2-uv-v^2=0$, откуда делением на v^2 находим, что $\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}=1$ (второй корень уравнения $2t^2-t-1=0$ следует отбросить), $\frac{x+1}{x-1}=1$, $x+1=x-1$, так что на промежутке $x\ge 1$ исходное уравнение корней не имеет.

Во втором случае (при $x\le -1$) получаем уравнение $-2u^2-uv+v^2=0$, откуда $\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{65}{63}$. Так как $-\frac{65}{63}\le -1$, то это — корень исходного уравнения.

Задача 6. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases}3x^2-2xy-y^2=0,\\ x^2+5y=6.\end{cases}$$

Первое уравнение системы — однородное степени 2. Деля обе его части на y^2 (случай $y=x=0$ не является решением системы) и полагая $t=\frac{x}{y}$, придем к квадратному уравнению $3t^2-2t-1=0$, откуда $t_1=1$, $t_2=-\frac{1}{3}$. Таким образом, либо $y=x$, либо $y=-3x$. Подставляя $y=x$, а затем $y=-3x$ во второе уравнение системы, найдем четыре ее решения: $x_1=y_1=1$; $x_2=y_2=-6$;

$$x_{3,4}=\frac{15\mp\sqrt{249}}{2},$$

$$y_{3,4}=\frac{-45\pm\sqrt{249}}{2}.$$

Задача 7. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases}3x^2-\frac{25}{12}xy+3y^2=50,\\ x^2+y^2=25.\end{cases} \qquad (4)$$

Эта система характерна тем, что все члены, содержащие неизвестные, имеют вторую степень. Чтобы освободиться от свободного члена, умножим второе уравнение системы на 2 и вычтем его из первого. Рассмотрим систему уравнений, которая состоит из полученного уравнения (оно однородное) и второго уравнения исходной системы:

$$\begin{cases}x^2-\frac{25}{12}xy+y^2=0,\\ x^2+y^2=25.\end{cases} \qquad (5)$$

Система (5) равносильна системе (4).

Из первого уравнения системы (5), положив $t=\frac{x}{y}$, находим: $t_1=\frac{3}{4}$, $t_2=\frac{4}{3}$. Подставляя $x=\frac{3}{4}y$ и $x=\frac{4}{3}y$ во второе уравнение системы, находим четыре решения: $x_{1,2}=\pm 3$, $y_{1,2}=\pm 4$; $x_{3,4}=\pm 4$, $y_{3,4}=\pm 3$.

Первое уравнение системы (5) определяет пару прямых с уравнениями $x=\frac{3}{4}y$ и $x=\frac{4}{3}y$, а второе — уравнение окружности с радиусом 5 и центром в начале координат. Решениями системы будут координаты точек пересечения прямых с окружностью (рис. 2).

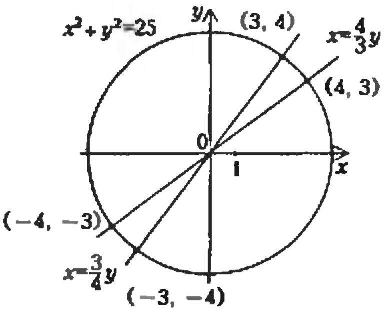


Рис. 2

Задача 8. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases}2x^2-3xy+y^2=3,\\ x^2+2xy-2y^2=6.\end{cases}$$

Умножив первое уравнение системы на 2 и вычтя из него второе уравнение, придем к системе

$$\begin{cases}3x^2-8xy+4y^2=0,\\ x^2+2xy-2y^2=6,\end{cases}$$

в которой первое уравнение — однородное, его решения $x=2y$ и $x=\frac{2}{3}y$. Подставив их во второе уравнение системы, находим два решения: $x_{1,2}=\pm 2$, $y_{1,2}=\pm 1$.

Рассмотрим примеры тригонометрических уравнений, решение которых можно свести к решению однородных уравнений.

Задача 9. *Решите уравнение*

$$2\sin x+3\cos x=0.$$

Это уравнение является однородным первой степени относительно $\sin x$ и $\cos x$. Делим обе части уравнения на $\cos x$ (легко видеть, что при этом потери корней нет). Имеем: $2\operatorname{tg}x+3=0$, $\operatorname{tg}x=-\frac{3}{2}$, $x=-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi k$ (k — целое).

Уравнение

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$$

приводится к виду

$$a\operatorname{tg}^2x+b\operatorname{tg}x+c=0.$$

Задача 10. *Решите уравнение*

$$\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0.$$

При делении частей уравнения на $\cos^2 x$ потери корней не будет, поэтому получаем уравнение $\operatorname{tg}^2x-3\operatorname{tg}x+2=0$, откуда $\operatorname{tg}x_1=1$, $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\operatorname{tg}x_2=2$, $x_2=\operatorname{arctg}2+\pi m$ (k, m — целые).

Уравнение $a\sin x+b\cos x=c$ допускает много способов решения. Его можно привести к однородному уравнению относительно $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{x}{2}$, подставив

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2},$$

$$c = c\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right).$$

Задача 11. *Решите уравнение*

$$3\sin x + 5\cos x = -3. \qquad (6)$$

Имеем:

$$3\sin x + 5\cos x = -3,$$

$$\sin^2\frac{x}{2} - 3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 4\cos^2\frac{x}{2} = 0,$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 3\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 4 = 0,\ \mathrm{tg}\frac{x_1}{2} = 4,$$

$$x_1 = 2\,\mathrm{arctg}\,4 + 2\pi k;\ \mathrm{tg}\frac{x_2}{2} = -1,$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m\ (k,\ m - \text{целые}).$$

Заметим, что решение уравнения $a\sin x + b\cos x = c$ с помощью введения вспомогательного аргумента не всегда удобно. Решая, например, этим методом уравнение (6), получим

$$3\sin x + 5\cos x =$$

$$= \sqrt{34}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\sin x + \frac{5}{\sqrt{34}}\cos x\right) =$$

$$= \sqrt{34}\sin\left[x + \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}\right],$$

$$\sin\left(x + \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{34}},$$

$$x = (-1)^{m+1}\arcsin\frac{3}{\sqrt{34}} -$$

$$-\arcsin\frac{5}{\sqrt{34}} + \pi m\ (m - \text{целое}).$$

Идея использования однородности при решении тригонометрических уравнений обогащается возможностью увеличивать на 2 степени одночленов относительно $u = \sin x$, $v = \cos x$ путем домножения их на $\sin^2 x + \cos^2 x$.

Задача 12. *Решите уравнение*

$$4\sin^3 x = \sin x + \cos x.$$

Домножая правую часть уравнения на $\sin^2 x + \cos^2 x$ и деля затем обе части на $\cos^3 x$, приходим к уравнению

$$3\,\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x - 1 = 0.$$

Догадавшись, что при разложении левой части на множителя один из них должен равняться $\mathrm{tg}\,x - 1$ (так как $\mathrm{tg}\,x = 1$ удовлетворяет уравнению), мы без труда находим это разложение

$$(\mathrm{tg}\,x - 1)(3\,\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\,x + 1) = 0$$

и ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ (k — целое).

Удачной заменой к однородным можно свести и некоторые показательные уравнения.

Задача 13. *Решите уравнение*

$$4^x = 2\cdot 14^x + 3\cdot 49^x.$$

Полагая $2^x = u$ и $7^x = v$, приходим к однородному относительно u и v уравнению второй степени $u^2 - 2uv - 3v^2 = 0$. Решая это уравнение, находим:

а) $\frac{u}{v} = -1$, $\left(\frac{2}{7}\right)^x = -1$ — решений нет;

б) $\frac{u}{v} = 3$, $\left(\frac{2}{7}\right)^x = 3$, $x = \log_{\frac{2}{7}} 3$.

Упражнения

1. Решите уравнение

$$6\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-2} = 5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$$

2. Решите уравнение

$$5^{\log_3(x^2)} - 3^{2\log_9(x^2/2)} = \sqrt{3^{\log_{\sqrt{3}}(2x^2)}} - 5^{\log_3(x^2)-1}.$$

3. Решите уравнение

$$\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-6x+9} + \left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-6x+9} = 6.$$

4. Решите уравнение

$$\sin 2x - \mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\cos 2x = 1.$$

5. Решите уравнение

$$2\sin 4x - 3\sin^2 2x = 1.$$

6. Решите уравнение

$$3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0.$$

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 420, \\ y^2 + x\sqrt{xy} = 280. \end{cases}$$

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

9. Решите уравнение

$$7\cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}.$$

10. В пустой резервуар по двум трубам одновременно начинает поступать чистая вода и раствор кислоты постоянной концентрации. После наполнения резервуара в нем получится 5%-ный раствор кислоты. Если бы в тот момент, когда резервуар был наполнен наполовину, подачу воды прекратили, то после наполнения резервуара в нем получился бы 10%-ный раствор кислоты. Определите, какая труба подает жидкость быстрее и во сколько раз.

11. Решите уравнение

$$\frac{(34-x)\sqrt[3]{x+1} - (x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x} - \sqrt[3]{x+1}} = 30.$$

12. Система уравнений

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$$

имеет два решения: $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, $x_2 = -5$, $y_2 = -7$. Можно ли утверждать, что множество решений системы не ограничивается парами (x_1y_1); (x_2y_2)? Если да, то какие еще решения имеет система?

13. Решите уравнение

$$2^{2x+2} - 6^x - 2\cdot 3^{2x+2} = 0.$$

14. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7} + \sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x +$$

$$+\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7} - \sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x = 2^{x+1}.$$

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x-y} - 3\cdot 2^x + 2^{x+y+2} = 2, \\ 2^{x-y+1} - 2^x - 5\cdot 2^{x+y} = 1. \end{cases}$$

16. Решите уравнение

$$2(x^2+2) = 5\sqrt{x^2+1}.$$

Варианты вступительных экзаменов 1994 года

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет, пробный экзамен[1])

1. Число x удовлетворяет условиям

$$\operatorname{tg}2x = -\frac{3}{4} \text{ и } \sin 2x > 0.$$

Обязательно ли при этих условиях определено выражение $\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}} \operatorname{tg}x$ и чему оно тогда равно?

2. Решите уравнение

$$3\sqrt{x+4} = 5 - 2|x+2|.$$

3. В круге с радиусом 1 проведены хорды $AB = \sqrt{2}$ и $BC = \frac{10}{7}$. Найдите площадь части круга, лежащей внутри угла ABC, если угол BAC острый.

4. Найдите все значения x, при которых большее из чисел $3x - 4$ и $\log_2\left(5\cdot 2^{2x-4} - 2^{x-1} + 1\right)$ положительно.

5. Найдите наибольшее значение объема пирамиды $SABC$ при следующих ограничениях:

$$SA \le 4,\ SB \ge 7,\ SC \ge 9,\ AB = 5,\ BC \le 6,\ AC \le 8.$$

6. Найдите все значения параметра $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, для каждого из которых уравнение

$$\sin 2x + \sin x + \sin(x - \alpha) = \sin\alpha + \sin(x + \alpha)$$

имеет ровно 5 различных корней на промежутке $\left[-\frac{7}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$.

Вариант 2

(механико-математический факультет, основной экзамен)

1. Найдите корни уравнения

$$\frac{4\sin x - 2\cos 2x - 1}{\cos 2x + \sqrt{3}\cos x - 2} = 0.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\log_{(2-5x)} 3 + \frac{1}{\log_2(2-5x)} \le \frac{1}{\log_6\left(6x^2 - 6x + 1\right)}.$$

4. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Вокруг треугольника EBC описана окружность, а касательная к этой окружности, проведенная в точке E, пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A, D и F лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $AF = a$, $AD = b$. Найдите EF.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сфера касается ребер AD, DD_1, CD и прямой BC_1. Найдите радиус сферы, если длины ребер куба равны 1.

6. При всех значениях параметра a решите уравнение

$$2x^2 + 2ax - a^2 = \sqrt{4x - 2a + 3a^2}.$$

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики, пробный экзамен)

1. Решите уравнение

$$\left(3|x+1| + \frac{1}{3}\right)^2 = 6(x+1)^2 + \frac{10}{9}.$$

2. Вычислите $\cos 2\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{ctg}\beta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. Решите неравенство

$$\sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-x-1}} \ge 5 - 9\cdot 3^{x-1}.$$

4. В остроугольном треугольнике EFG на высоте EM взята точка P, а на высоте GN — точка Q так, что углы FPG и EQF — прямые. Известно, что $FQ = \sqrt{3} + 1$, а $\angle PFQ = 15^\circ$. Найдите расстояние от точки P до прямой FQ.

5. Числа c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 удовлетворяют соотношению

$$\log_3 c_k \cdot \log_3(c_{k-1}\cdot c_{k+1}) = \log_3 c_{k-1} \cdot \log_3 c_{k+1} \cdot \log_3\left(9c_k^2\right)$$

при $k = 2, 3, 4$. Известно, что $c_1 = 3$, $c_5 = 3^{\sqrt{25}}$. Найдите $\log_3\left(c_2^4 - c_3^9 + 3c_4\right)$.

6. В треугольной пирамиде $PQRS$ ребра PR и QR перпендикулярны. На ребре PQ взята точка A так, что квадрат суммы расстояний от вершин P, Q, S до прямой AR равен удвоенной сумме квадратов длин ребер PR, QR, SR. Известно, что $PR = 15$, $SR = 17$, $\angle SRQ = 60^\circ$. Найдите длину ребра SQ.

Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите уравнение

$$8\sin 5x + \cos 10x + 1 = 0.$$

2. Решите неравенство

$$|x - 7| \le 3 - \sqrt{x - 4}.$$

3. Найдите все отрицательные значения v, при которых выполнено неравенство

$$\frac{1}{\log_5\left(\frac{\cos v}{5}\right)} - \frac{1}{\log_{5\cos v}\left(\frac{1}{5}\right)} \ge 0.$$

4. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 18, длина биссектрисы AE равна $4\sqrt{15}$, а длина отрезка EC равна 5. Определите периметр треугольника ABC.

---

[1] *Пробные экзамены проходили в мае.*

5. В начальный момент лечения пациенту была произведена первая инъекция 8 единиц некоторого лекарства, а во время каждой последующей инъекции ему вводится по 5 единиц того же лекарства. За время между инъекциями количество лекарства в организме уменьшается в 6 раз. Какое количество лекарства будет содержаться в организме пациента после 25-й инъекции?

6. Все высоты пирамиды $EFGH$, грани которой являются остроугольными треугольниками, равны между собой. Известно, что $FG = 17$, $HG = 14$, а $\angle EHG = 60^\circ$. Найдите длину ребра HF.

Вариант 5

(физический факультет, пробный экзамен)

1. Решите уравнение

$$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{6}\log_2(x-2) - \frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{8}} \sqrt{3x-5}.$$

3. Решите уравнение

$$5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20.$$

4. В прямоугольном треугольнике отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности равно $2/5$. Найдите острые углы треугольника.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y = 5 + |x-1|. \end{cases}$$

6. В треугольнике ABC медианы AD и CE взаимно перпендикулярны, $AB = c$, $BC = a$. Найдите AC.

7. При каких значениях a уравнение

$$2a(x+1)^2 - |x+1| + 1 = 0$$

имеет четыре различных решения?

8. Наклонная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет своими основаниями трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Сумма площадей параллельных боковых граней призмы равна S, а расстояние между этими гранями равно d. Найдите объем многогранника $BDA_1B_1C_1D_1$.

Вариант 6

(физический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{2x-1}{\log_2 x} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$5\cos x + 2\sin x = 3.$$

3. Решите уравнение

$$5^{x-1} + 5\cdot(0{,}2)^{x-2} = 26.$$

4. В равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на основание и на боковую сторону, равны соответственно m и n. Найдите стороны треугольника.

5. Решите уравнение

$$\log^2_{\frac{1}{2}}(4x) + \log_2\left(\frac{x^2}{8}\right) = 8.$$

6. В окружности пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны, $AD = m$, $BC = n$. Найдите диаметр окружности.

7. Для каких значений a система неравенств

$$\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geq 0, \\ x \leq 2 \end{cases}$$

выполняется хотя бы при одном значении x?

8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α, сторона основания равна a, SH — высота пирамиды. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку H параллельно ребрам SA и BC.

Вариант 7

(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_5(x+1) + \log_5(x+5) = 1.$$

2. Решите уравнение

$$2x > |x| + 1.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}.$$

4. Прямоугольные треугольники ABC и ABD имеют общую гипотенузу $AB = 5$. Точки C и D расположены по разные стороны от прямой, проходящей через точки A и B, $BC = BD = 3$. Точка E лежит на AC, $EC = 1$. Точка F лежит на AD, $FD = 2$. Найдите площадь пятиугольника $ECBDF$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2x\sin y + 1 = 0, \\ 8|x|y(x^2+y^2) + \pi^3 + 4\pi = 0. \end{cases}$$

Вариант 8

(биологический факультет)

1. Решите систему

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$$

2. Какое из чисел больше:

$$\sqrt{11} \text{ или } 9^{\frac{1}{2}\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)+\frac{3}{2}\log_9 2}?$$

3. Найдите все решения уравнения

$$3\operatorname{tg}^2\left(\pi x - \frac{\pi}{8}\right) = 1,$$

удовлетворяющие условию $\frac{3}{2} < x < 3$.

4. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = 4$, $BC = 1$ и углы $\angle A = \operatorname{arctg} 2$, $\angle D = \operatorname{arctg} 3$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник CBE, где E — точка пересечения диагоналей.

5. Найдите такие значения x, при которых неравенство

$$(4-2a)x^2 + (13a-27)x + (33-13a) > 0$$

выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $1 < a < 3$.

Вариант 9

(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение $\sin^3 x - \sin^2 x = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\cdot 2^x + y = 13, \\ 2^{2x+1} + 3y = 35. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\lg(x+5) \geq -2\cdot\lg\left(\frac{1}{3-x}\right).$$

4. При каких значениях параметров a и b система неравенств

$$\begin{cases} a+\sin bx \le 1, \\ x^2+ax+1 \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

5. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P. Длина отрезка, соединяющего вершину C с точкой M, являющейся серединой отрезка AD, равна $5/4$. Расстояние от точки P до отрезка BC равно $1/2$ и $AP=1$. Найдите длину отрезка AD, если известно, что вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

Вариант 10

(геологический факультет, пробный экзамен)

1. Какое из чисел больше: $\sqrt[3]{83}$ или $\sqrt{19}$?

2. Упростите до численного значения выражение

$$\frac{5\sqrt{7}\sqrt{a}+5\sqrt{13}\sqrt{b}}{4\sqrt{7}\sqrt{a}-4\sqrt{13}\sqrt{b}}:\frac{7a-13b}{14a+26b-4\sqrt{91ab}}.$$

3. Решите неравенство

$$x+7<\sqrt{35+x^2+12x}.$$

4. Решите уравнение

$$\cos 4x=\cos 4.$$

5. Решите уравнение

$$(3-\log_7 x)\cdot\log_7 x=\frac{5}{4}.$$

6. Решите неравенство

$$\frac{1}{|x|}\left(x^4-8x^2-20\right)\le 0.$$

7. Известны длины двух сторон $a=7$, $b=9$ треугольника и его площадь $S=14\sqrt{5}$. Третья его сторона больше удвоенной медианы, проведенной к ней. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

8. Поля пшеницы площадью 50 га, 70 га и 90 га убираются так: первое поле одним комбайном, второе поле — сначала 30 га первым комбайном, затем 40 га вторым комбайном, а третье поле — сначала 20 га первым комбайном, затем 70 га вторым комбайном. Производительность первого комбайна на 12 га в день меньше, чем у второго комбайна. Какое из полей убирается за наименьшее время, если производительность второго комбайна не менее 20 га в день, но менее 22 га в день?

Вариант 11

(геологический факультет, основной экзамен)

1. Какое из чисел меньше: $2\cdot\sqrt{10}$ или $6,(32)$?

2. Упростите до целого числа выражение

$$\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{\sqrt{6-\sqrt{2}}}\cdot 4\sqrt{\frac{17}{2}}.$$

3. Решите уравнение

$$z+42-11\sqrt{z^2-z-42}-z^2=0.$$

4. Решите уравнение

$$\sin 4x-\sin 12x+\sin 20x=0.$$

5. Решите неравенство

$$\sqrt{-18-y^2-9y}\ne 0.$$

6. Решите неравенство

$$5\sin x-\sin 2x>0.$$

7. Мероприятия по дезактивации радиоактивного заражения территории проводились в четыре этапа. На каждом из них уровень радиации снижался на определенное количество процентов по отношению к ее уровню на предыдущем этапе: на первом этапе — на 20%, на втором этапе — на 30%, на третьем этапе — на 40%, на четвертом этапе — на 50%. На сколько процентов в результате уменьшился уровень радиации на зараженной территории?

8. Четырехугольник $ABCD$ таков, что около него можно описать и в него можно вписать окружности. Разность длин сторон AB и CD равна разности длин сторон BC и AD. Докажите, что диагональ BD — диаметр описанной окружности.

9. Четыре бригады разрабатывали месторождение медной руды в течение трех лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. На третьем году в течение двух месяцев работа не велась, а все остальное время работала только одна из бригад. Отношения времен работ первой, второй, третьей и четвертой бригад и количества выработанной продукции соответственно равны:
в первый год 4 : 3 : 2 : 3 и 30 млн т.;
во второй год 1: 2 : 5: 4 и 22 млн т.;
в третий год 3 : 2 : 2 : 3 и 21 млн т.
Сколько млн т. медной руды выработали бы за 5 месяцев четыре бригады, работая все вместе?

10. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, в нем проведена диагональ через вершину C, а через вершину C' (конец ребра CC') проведено сечение этого куба перпендикулярно указанной диагонали. Найдите отношение площади этого сечения к площади боковой поверхности куба. В каком отношении сечение делит эту диагональ?

Вариант 12

(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin 2x=\sqrt{2}\sin x.$$

2. Сумма первых двадцати членов арифметической прогрессии (a_n) в пять раз меньше суммы первых двадцати пяти членов арифметической прогрессии (b_n). Найдите отношение разности прогрессии (a_n) к разности прогрессии (b_n), если известно, что

$$4a_{12}=b_{19}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_x\left(2-x-x^2\right)>0.$$

4. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найдите длину CN, если длины катетов равны 1 и 4.

5. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$a+\sqrt{6x-x^2-8}=3+\sqrt{1+2ax-a^2-x^2}$$

имеет равно одно решение.

Вариант 13

(экономический факультет)

1. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 7875x^3=1701y^3, \\ |x|\le 5. \end{cases}$$

2. Найдите область значений функции

$$y=-\sqrt{-3x^2+12x-3}.$$

3. Решите уравнение

$$\log_3\left((x+10)\cdot\cos x\right)=\log_3\left(\frac{x+10}{\cos x}\right).$$

4. Составьте уравнение окружности наименьшего радиуса, внутри которой помещается множество, заданное на координатной плоскости условием

$$\left|2y+3x-2\right|+\left|3x+6\right|<6.$$

5. Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. Известно, что при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее $\frac{40500}{n}+270-\left|90-\frac{40500}{n}\right|$ тыс. р, а цена реализации каждого телевизора при этом не превосходит $540-\frac{3}{10}n$ тыс.р. Определите ежемесячный объем производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях ежемесячная прибыль.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок CM, соединяющий вершину C с точкой M, расположенной на стороне AD, пересекает диагональ BD в точке K. Известно, что $CK : KM = 2 : 1$, $CD : DK = 5 : 3$ и $\angle ABD+\angle ACD=180^\circ$. Найдите отношение стороны AB к диагонали AC.

Вариант 14

(факультет психологии)

1. Верно ли неравенство

$$3\log_2 5<\sqrt{9\log_2 5+28}$$

(таблицами и калькулятором не пользуйтесь!)?

2. Известно, что $x = 1$, $y = -1$, одно из решений системы

$$\begin{cases}2ax+by=\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{1111\pi}{6},\\ ax^2+by^2=2.\end{cases}$$

Найдите все решения данной системы.

3. В тупоугольном треугольнике ABC на стороне AB длины 14 выбрана точка L, равноудаленная от прямых AC и BC, а на отрезке AL — точка K, равноудаленная от вершин A и B. Найдите синус угла ACB, если $KL = 1$, $\angle CAB=45^\circ$.

4. Длины боковых ребер SA и SB четырехугольной пирамиды $SABCD$ относятся как $\sqrt{7}:\sqrt{11}$. Через точки A, B, D проведена сфера, пересекающая ребра SA, SB, SD, в точках A_1, B_1, D_1 соответственно, причем $AA_1 : A_1S = 1 : 3$. Через точки B, C, D, D_1 проведена еще одна сфера, пересекающая боковое ребро в точке E. Найдите отношение $SE : B_1B$.

5. Абитуриенты сдавали экзамены в течение трех дней в одних и тех же аудиториях. Число экзаменовавшихся каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было бы провести за два дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу аудиторий. Найдите минимальное возможное число абитуриентов, которое могло быть проэкзаменовано при этих условиях.

Вариант 15

(институт стран Азии и Африки)

1. Биржа запланировала провести торги в июле и августе. Если объем торгов в июле оставить на запланированном уровне, а план на август превысить в три раза, то суммарный объем торгов, проводимых в течение этих двух месяцев, возрастает в два раза. Найдите отношение объемов торгов, запланированных на июль и на август, и выясните, во сколько раз надо увеличить план на июль, оставляя неизменным план на август, чтобы суммарный объем торгов, проводимых за эти два месяца, возрос в три раза.

2. Решите уравнение

$$2^{x\cdot\log_2 7}\cdot 7^{x^2+x}=1.$$

3. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, касается катетов AC и BC соответственно в точках E и D. Найдите величину угла ABC, если известно, что $AE = 1$, $BD = 3$.

4. Решите неравенство

$$2\sin x-1\le\sqrt{6\sin^2 x-6\sin x-12}.$$

5. Решите неравенство

$$\left|x-4^{1+\sqrt{3-x}}\right|\le\frac{5}{3}x-4\cdot4^{\sqrt{3-x}}.$$

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$a^2x^2+2a\left(\sqrt{2}-1\right)x+\sqrt{x-2}=2\sqrt{2}-3$$

имеет решение?

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. На горизонтальном столе лежат два бруска, связанные нитью (рис.1). Нить расположена в вертикальной плоскости, проходящей через центры брусков, и образует с горизонтом угол α. К первому бруску массой m_1 приложена сила F, линия действия которой горизонтальна и проходит через его центр. Определите зависимость силы натяжения нити от величины силы F при движении брусков, если коэффициент трения брусков о стол μ, масса второго бруска m_2, а угол α неизменный.

Рис. 1

2. На наклонную плоскость положили шайбу и сообщили ей скорость, направленную вдоль плоскости вверх. Коэффициент трения шайбы о плоскость μ. Найдите угол наклона плоскости к горизонту, при котором шайба пройдет минимальное расстояние до остановки.

3. К оси невесомого блока на жестком стержне подвешен груз (рис.2). Масса стержня и груза m. Блок подвешен

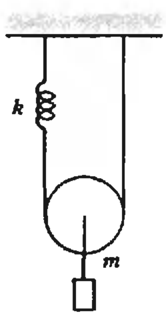


Рис. 2

на нити, один конец которой прикреплен к потолку непосредственно, а другой — через невесомую пружину жесткостью k. Груз совершает малые незатухающие колебания вдоль вертикали. Найдите период этих колебаний.

4. Какое количество теплоты получит 1 моль идеального одноатомного газа при изобарическом нагревании от некоторой начальной температуры и последующем адиабатическом расширении, если при адиабатическом расширении газ совершает работу A, а в конечном состоянии его температура равна начальной?

5. В закрытом цилиндре при температуре T_1 находится вода вместе со своим насыщенным паром. Масса воды m, а занимаемый ею объем много меньше объема цилиндра V. Найдите температуру, при которой вся вода в цилиндре испарится, если при T_1 давление насыщенных паров воды равно p_1 и можно считать, что в пределах интересующего интервала температур давление насыщенных паров изменяется по линейному закону $p(T) = p_1 + \alpha(T - T_1)$.

6. Обкладки плоского воздушного конденсатора, подключенного к источнику постоянного напряжения, притягиваются с силой, равной F_0. Какая сила будет действовать на обкладки, если в зазор параллельно им вставить металлическую пластину, толщина которой в $n = 2$ раза меньше величины зазора, а остальные размеры совпадают с размерами обкладок?

7. На горизонтальный вал электрогенератора, нагруженного на резистор, намотана нить, к свободному концу которой прикреплен груз массой m_1. При установившемся движении груза напряжение на резисторе равно U_1. Какое напряжение установится на этом же резисторе, если к нити прикрепить груз массой m_2 вместо m_1? Сопротивлением обмоток генератора и силами трения пренебречь. Индуктор генератора изготовлен из постоянного магнита.

8. Первичная обмотка повышающего трансформатора с коэффициентом трансформации $k = 3$ включена в городскую сеть с напряжением $U_1 = 220$ В, а ко вторичной обмотке, имеющей сопротивление $r = 20$ Ом, подключен резистор. Напряжение на зажимах вторичной обмотки равно $U_2 = 650$ В. Пренебрегая потерями и сопротивлением первичной обмотки, определите сопротивление резистора.

9. Шар радиусом R из стекла с показателем преломления n разрезан по диаметру. На диаметральную плоскость одной из половин шара нормально падает параллельный пучок света. На каком расстоянии от центра шара пересекут главную оптическую ось лучи, прошедшие сферическую поверхность на наибольшем удалении от этой оси?

10. На непрозрачный экран, в котором сделаны две параллельные одинаковые щели, нормально падает параллельный пучок света. Длина волны света $\lambda = 0{,}5$ мкм. Расстояние между щелями $d = 50$ мкм. За экраном расположена собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 20$ см так, что ее оптическая ось перпендикулярна плоскости экрана и проходит через середину промежутка между щелями. Определите ширину центрального дифракционного максимума, наблюдаемого в фокальной плоскости линзы.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Наклонная плоскость, образующая с горизонтом угол $\alpha = 30°$, движется с ускорением $\vec{a}$, направленным влево, как показано на рисунке 3. При каких значениях a тело, находящееся на наклонной плоскости, будет скользить вверх вдоль нее? Коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu = 0{,}3$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

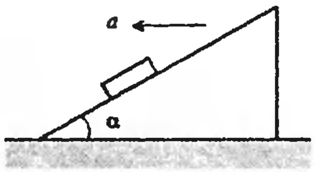


Рис. 3

2. На невесомой нити, перекинутой через неподвижный цилиндр, подвешены два груза, массы которых $m_1 = 10$ кг и $m_2 = 1$ кг. Первоначально грузы удерживают на одной высоте. После освобождения грузов (без начальной скорости) первый, двигаясь равноускоренно, опускается на высоту $h = 2$ м за время $\tau = 1$ с. Какое количество теплоты выделяется за это время из-за трения нити о поверхность цилиндра? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

3. Шарику, подвешенному на нити, сообщили некоторую начальную скорость, после чего он начал двигаться по окружности в вертикальной плоскости. Определите массу шарика, если известно, что сила натяжения нити в верхней точке траектории составляет $T_1 = 1$ Н, а в нижней точке — $T_2 = 2$ Н. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

4. Автомобиль массой M поднимается с постоянной скоростью вверх по дороге, составляющей угол α с горизонтом. Найдите силу взаимодействия ведущих (задних) колес с поверхностью дороги. Расстояние между осями автомобиля L, центр тяжести находится посередине между осями на расстоянии H от поверхности дороги. Силу трения, действующую на передние колеса, не учитывайте.

5. С одноатомным идеальным газом совершается циклический процесс. Из начального состояния с давлением $p_1 = 1{,}6$ МПа и объемом $V_1 = 2$ л газ расширяется при постоянном давлении до объема $V_2 = 16$ л. Затем при постоянном объеме давление газа уменьшается до величины $p_2 = 50$ кПа. После чего газ приводится в начальное состояние адиабатическим сжатием. Найдите работу, совершенную газом за цикл.

6. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде, площадь сечения которого $S = 23$ см^2, под поршнем массой $M = 1$ кг находится одноатомный газ. Расстояние между дном сосуда и поршнем $h = 30$ см. На внутренней стенке сосуда имеется стопорное кольцо, не позволяющее поршню превысить высоту $H = 50$ см. Какое количество теплоты нужно сообщить газу, чтобы его давление увеличилось в $\alpha = 1{,}5$ раза? Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа.

7. Температура нагревателя идеальной тепловой машины $T_1 = 400$ К, температура холодильника $T_2 = 300$ К, количество теплоты, получаемое от нагревателя за цикл, $Q = 400$ Дж, число циклов в секунду $n = 2$. С какой скоростью будет перемещаться по горизонтальной дороге тележка, приводимая в движение такой машиной, если сила сопротивления $F = 100$ Н? Скорость тележки считайте постоянной.

8. Два нагревательных элемента, мощности которых $P_1 = 100$ Вт и $P_2 = 200$ Вт, включают в сеть сначала параллельно, а затем последовательно. Чему равно отношение общих мощностей, выделяющихся в этих нагревателях в рассматриваемых двух случаях? Считайте, что сопротивления элементов не зависят от температуры.

9. Цепь, показанная на рисунке 4, находилась достаточно долго в состоянии с замкнутым ключом K. В некоторый момент времени ключ разомкнули. Какое количество теплоты выделится на резисторе сопротивлением R_2 после размыкания ключа? При расчетах положить $\mathcal{E} = 300$ В, $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 200$ Ом, $C = 10$ мкФ. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

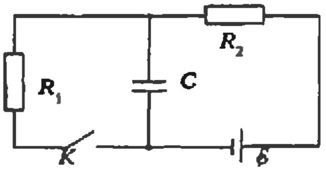


Рис. 4

10. На поверхности прозрачной жидкости в сосуде с вертикальными стенками плавает тонкий кружок диаметром d. Найдите высоту тени на боковой стенке сосуда, если поверхность жидкости освещается пучком параллельных лучей света, падающих под углом $\alpha = 45°$. Показатель преломления жидкости $n = 1{,}41$.

Химический факультет

1. Аттракцион состоит в катании на карусели по окружности радиусом $R = 10$ м, расположенной в горизонтальной плоскости на высоте $h = 5$ м от земли. На каком расстоянии от оси карусели упадет на землю предмет, выпавший из рук одного из катающихся, если время полного оборота карусели $T = 5$ с?

2. На гладкой горизонтальной поверхности лежит прямоугольный клин с углом $\alpha = 15°$ при основании, упираясь торцом в неподвижную вертикальную стенку. По верхней грани клина соскальзывает без трения брусок массой $m = 0{,}2$ кг (рис.5). Найдите силу нормального давления клина на стенку.

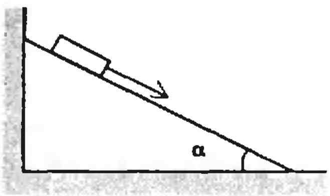


Рис. 5

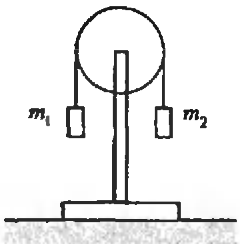


Рис. 6

3. На горизонтальной поверхности стоит штатив массой $M = 1$ кг, на котором укреплен невесомый блок. На концах невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, подвешены грузы, массы которых $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 = 0{,}8$ кг соответственно (рис.6). Пренебрегая трением, найдите силу, с которой основание штатива давит на поверхность. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2.

4. Маленький шарик, привязанный двумя невесомыми нерастяжимыми нитями к точкам A и B опоры, находящимся на одной вертикали, равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости (рис.7). Длины нитей одинаковы и равны расстоянию между A и B: $L = AB = 0{,}6$ м. При каких значениях скорости движения шарика нижняя нить будет провисать? Считать $g = 10$ м/с^2.

5. Однородной пластмассовый стержень длиной $L = 0{,}3$ м с площадью поперечного сечения $S = 4$ мм^2, который на две трети погружен в наполненный до краев водой сосуд, опираясь о дно и край сосуда, находится в равновесии (рис.8). Найдите силу, с которой стержень давит на дно сосуда. Плотность пластмассы $\rho = 1500$ кг/м^3, воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3. Трением стержня о дно сосуда пренебречь.

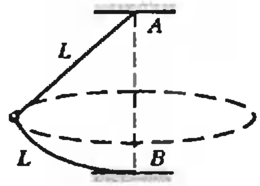


Рис. 7

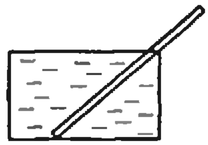


Рис. 8

6. Два сосуда емкостью $V_1 = 2$ л и $V_2 = 4$ л, соединенные тонкой эластичной трубкой, перекрытой краном K, наполнены азотом (N_2) и уравновешены на равноплечных весах (рис.9). Давление газа в первом сосуде $p_1 = 3\cdot10^5$ Па, во втором $p_2 = 6\cdot10^5$ Па. Гирю какой массы нужно положить на одну из чаш весов, чтобы восстановить равновесие после того, как кран будет открыт? Температура газа $T = 300$ К. Газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

7. В электростатическом поле, создаваемом двумя разноименными точечными зарядами, имеющими одинаковый модуль $|q| = 10^{-7}$ Кл и расположенными на расстоянии $L = 0{,}6$ м друг от друга, пролетает заряженная частица. В точке траектории, находящейся на равных расстояниях $L/2$ от зарядов, порождающих поле, ее ускорение $a = 2$ м/с^2. Найдите отношение заряда частицы к ее массе. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 0{,}885\cdot10^{-11}$ Ф/м.

8. Электрическая цепь состоит из двух конденсаторов емкостью $C_1 = 2\cdot10^{-6}$ Ф и $C_2 = 3\cdot10^{-6}$ Ф, двух источников постоянного напряжения с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 1$ В и $\mathcal{E}_2 = 1{,}5$ В, амперметра А и ключа K (рис.10). Найдите величину заряда, который протечет через амперметр, если ключ перекинуть из положения 1 в положение 2.

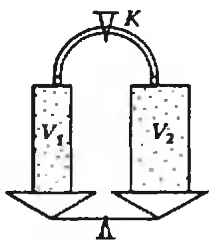


Рис. 9

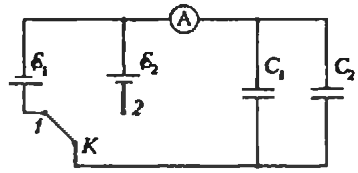


Рис. 10

9. Протон сначала ускоряется в электростатическом поле, проходя разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = 800$ В, а затем движется в постоянном магнитном поле. Найдите ускорение протона в точке, в которой магнитная индукция имеет модуль $B = 0{,}1$ Тл и составляет угол $\alpha = 30°$ со скоростью протона. Отношение заряда протона к его массе считать равным $e/m = 10^8$ Кл/кг, начальная скорость протона равна нулю.

10. На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см на расстоянии $d = 30$ см от линзы находится точечный источник света. Линза совершает малые гармонические колебания с амплитудой $A = 0{,}2$ см перпендикулярно главной оптической оси. Найдите амплитуду колебаний изображения источника.

Публикацию подготовили Д.Белов, А.Будак, С.Волошин, В.Говоров, И.Иновенков, Г.Медведев, М.Потапов, И.Сергеев, А.Часовских, С.Чесноков

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстрации.

Вариант 1

1. На наклонной плоскости лежат два тела с одной и той же массой m, соединенные нитью. Коэффициенты трения тел о плоскость у верхнего μ_2, у нижнего μ_1, причем $\mu_2 > \mu_1$. Угол наклона плоскости медленно увеличивают. Найдите натяжение нити в момент, когда тела начнут скользить вниз. Ускорение свободного падения g.

2. Пространство между идеально проводящими металлическими пластинами, находящимися на малом расстоянии d друг от друга, заполнено проводящей жидкостью. При этом сопротивление между пластинами равно R_0. Затем в зазор ввели изогнутую посередине тонкую идеально проводящую фольгу и расположили ее, как показано на рисунке 1. Найдите сопротивление между внешними пластинами в такой системе. Краевыми эффектами пренебречь.

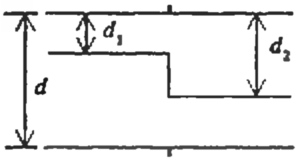


Рис. 1

3. На горизонтальном столе удерживают прямоугольную массивную рамку с током. Ширина рамки b. Вдоль оси рамки на высоте h проходит провод с таким же по величине током (рис.2). Рамку отпускают, и она начинает скользить по столу. Опыт повторяют при различных значениях тока. Найдите максимально возможное начальное ускорение рамки, при котором ее движение начнется без отрыва части рамки от стола. Коэффициент трения рамки о стол μ, ускорение свободного падения g.

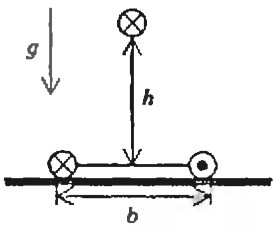


Рис. 2

4. Оцените, на какое время хватит аквалангисту баллона со сжатым воздухом на глубине сорок метров. Начальное давление воздуха в баллоне сто атмосфер.

5. В широкий тонкостенный стакан налито немного чистой воды, а в более узкий налита подкрашенная жидкость. Узкий стакан опускают соосно в широкий, после чего видно, что цвет воды в широком стакане становится таким же, как и в узком. Затем стакан с подкрашенной жидкостью вынимают, и вода в широком сосуде принимает свой естественный вид. Объясните явление.

Вариант 2

1. Два шара лежат в сосуде так, как показано на рисунке 3. Радиус нижнего шара в два раза больше, чем верхнего. Если в сосуд налить воду плотностью ρ_0 до середины верхнего шара, то нижний перестанет давить на дно. Найдите плотность материала, из которого изготовлены шары. Трением о боковые стенки пренебречь.

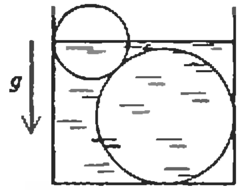


Рис. 3

2. Вертикальный цилиндрический сосуд разделен пополам непроводящим тепло подвижным массивным поршнем. В верхнем отсеке *1* находится газ массой m_1 с молярной массой M_1 при температуре T_1. В нижнем отсеке *2* находится другой газ массой m_2 с молярной массой M_2 при температуре T_2. После переворачивания сосуда для восстановления прежних объемов пришлось изменить температуру в отсеке *2*. При этом температура в отсеке *1* не изменилась. Найдите новую температуру в отсеке *2* и давление газа в нем. Масса поршня m, площадь сечения S.

3. На горизонтальной плоскости с коэффициентом трения μ покоились два тела с массами M и m, заряженные разноименными зарядами Q и $-Q$. Тело массой m начинают медленно двигать к другому телу до тех пор, пока оно не начнет скользить дальше само. В тот момент, когда тело массой M сдвигается с места, электрические заряды быстро убирают. Во сколько раз должны отличаться массы, чтобы тела коснулись друг друга при их дальнейшем движении? Размеры тел считайте малыми.

4. Оцените, с какого расстояния астронавт увидит невооруженным глазом Солнце как обычную звезду, а не как светящийся диск.

5. На некотором расстоянии от прямого длинного постоянного магнита находится могущая вращаться магнитная стрелка, которая показывает направление вдоль магнита. При разведении половинок разрезанного магнита стрелка меняет первоначальное направление на противоположное. Объясните явление.

Вариант 3

1. В светонепроницаемой стенке имеется отверстие диаметром D, в которое вставлена собирающая линза. Параллельный пучок света, падающий перпендикулярно стенке,

проходит через линзу и создает на экране световое пятно радиусом $2D$. Каким будет размер пятна, если расстояние от стенки до экрана увеличить вдвое?

2. На тележке массой m_1 стоит ящик с песком массой m_2, коэффициент трения между ними μ. В ящик попадает и застревает в нем летящая горизонтально со скоростью v_0 пуля массой m_3. На какое расстояние сдвинется ящик относительно тележки?

3. Катод K и анод A фотоэлемента представляют собой две пластины площадью S каждая, находящиеся на расстоянии d друг от друга (рис.4). На расстоянии $2d/3$ от катода размещена проволочная сетка C. Между сеткой и катодом подано напряжение U_0, полярность указана на рисунке. Какой максимальный заряд может накопиться на аноде, если катод облучить светом частотой ν? Работа выхода материала катода A, постоянная Планка h, заряд электрона $-e$.

4. Оцените среднюю силу, с которой водяные капли действуют на зонтик во время сильного дождя.

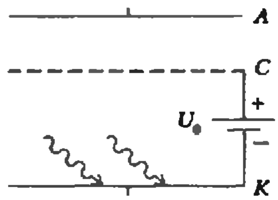


Рис. 4

5. Два шара подвешены на нитях одной и той же длины. Шары разводят и отпускают. В нижней точке они сталкиваются и почти упруго отскакивают друг от друга. Если теперь один из шаров зажать в тисках в нижней точке, а второй снова отвести и отпустить, то при ударе о зажатый шар налетающий полностью останавливается. Объясните явление.

Публикацию подготовил Г.Меледин

ИНФОРМАЦИЯ

IV МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

С 21 по 29 октября 1994 года в Ростове-на-Дону проходила очередная тест-рейтинговая олимпиада «Интеллектуальный марафон», организованная Московским Интеллект-клубом «Глюон» при участии и поддержке Ростовского городского управления образования, Департамента образования администрации Ростовской области, Классического лицея № 1 при Ростовском государственном университете, Евразийского физического общества и ряда других организаций.

Тест-рейтинговая олимпиада — одна из составных частей научно-методической программы клуба «Глюон», который ведет поиск и осуществляет поддержку и социальную защиту интеллектуально одаренных детей.

В этот раз на олимпиаду приехали 98 школьников, гимназистов, лицеистов, представлявшие 28 команд из различных регионов России и СНГ. Каждый участвовал в индивидуальных (письменных) и в командных (устных) соревнованиях по английскому языку, физике и математике, а также — впервые — по истории научных идей и открытий. Это новое соревнование вызвало большой интерес участников.

В промежутках между состязаниями состоялись интересные экскурсии. Ребята съездили на теплоходе в Старочеркасск — бывшую столицу Донского казачества, где познакомились с историей, традициями и обычаями донских казаков, прокатились на автобусе по Ростову, что позволило лучше узнать город, его достопримечательности и историю.

В последний день, как обычно, подводились итоги олимпиады.

В личном зачете абсолютным победителем стал ученик с.ш. № 57 из Москвы Юрий Браилов, на втором месте — ученик той же школы Максим Островский, на третьем месте — ученик московского лицея «Вторая школа» Александр Буфетов.

Ю.Браилов был также лучшим по физике, М.Островский — по математике, а А.Буфетов показал второй результат по английскому языку и высокие результаты по физике и математике.

В командном зачете первое место заняла команда московской школы № 57 (повторив результат прошлой олимпиады); на втором месте — лицей «Вторая школа» из Москвы; третьей стала команда из лицея «Физико-техническая школа при ФТИ им. А.Ф.Иоффе» (Санкт-Петербург).

Победители и призеры в личных и командных зачетах были награждены дипломами, ценными призами, подарками и сувенирами.

Традиционно был вручен специальный приз самому юному участнику олимпиады — Александру Горбульскому (13 лет), он представлял Аничков лицей из Санкт-Петербурга; почетный приз «Мисс Олимпиада-94» получила Татьяна Ириничева из 2-й Санкт-Петербургской гимназии; приз за самое красивое решение задачи по физике — книгу об академике Я.Б. Зельдовиче, подписанную вице-президентом РАН академиком Ж.И. Алферовым — получил Сергей Сибиряков из московского лицея «Вторая школа». Приз за волю к победе увезла команда Лингвистической гимназии из г. Улан-Удэ, а приз зрительских симпатий зарубежной команде (Гитара Олимпиады) достался школьникам из Черновицкого лицея № 1 (Украина).

Очередная V Международная тест-рейтинговая олимпиада «Интеллектуальный марафон-95» для одаренных детей России, СНГ и Европы состоится в октябре — ноябре 1995 года. Интеллект-клуб «Глюон» приглашает принять в ней участие центры по работе с интеллектуально одаренными детьми, школы, гимназии, лицеи.

Заявки об участии просим присылать по адресу: Россия, 115580, Москва, а/я № 10, Московский Интеллект-клуб «Глюон».

Ниже мы приводим задачи письменных туров по математике и физике и избранные задачи устного тура по истории научных идей и открытий.

МАТЕМАТИКА

1. Найдите трехзначное число, куб которого оканчивается на три семерки.

2. Точка внутри выпуклого четырехугольника с площадью S соединена с его вершинами. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого являются точками пересечения медиан образовавшихся четырех треугольников.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y)^3 = z, \\ (y+z)^3 = x, \\ (z+x)^3 = y. \end{cases}$$

4. Можно ли, пользуясь только операциями сложения, вычитания и умножения, составить из многочленов $f(x)$ и $g(x)$ выражение, равное x, если

а) $f(x)=x^2+x,\ g(x)=x^2+2$;

б) $f(x)=2x^2+x,\ g(x)=2x$;

в) $f(x)=x^2+x,\ g(x)=x^2-2$?

5. Окружности с центрами O и O' расположены на плоскости одна вне другой. Касательная, проведенная из точки O ко второй окружности, пересекает первую окружность в точках A и B, а касательная из O' к первой окружности пересекает вторую окружность в точках A' и B', причем точки A и A' лежат по одну сторону от прямой OO'. Зная расстояния $AA'=a$ и $BB'=b$, найдите OO'.

6. В правильном а) пятиугольнике, б) шестиугольнике проведены все диагонали. Около всех вершин и всех точек пересечения диагоналей написаны единицы. Разрешается поменять знаки всех чисел, стоящих на любой линии (стороне многоугольника или диагонали). Можно ли за несколько таких операций поменять знаки всех чисел?

7. Строго возрастающая функция $f(k)$, заданная на множестве натуральных чисел (k = 1, 2, 3 ...) и принимающая натуральные значения при всех $k\geq1$, удовлетворяет условию $f(f(k))=3k$. Найдите $f(1994)$.

ФИЗИКА

1. При какой наименьшей начальной скорости можно перебросить теннисный мяч с земли через прямоугольный ангар шириной d = 20 м и высотой h = 10 м? А через полуцилиндрический ангар высотой R = 10 м?

2. В частично откачанном баллоне давление воздуха составляет половину атмосферного давления. Вентиль открывают, происходит быстрое заполнение баллона атмосферным воздухом, и сразу после выравнивания давлений вентиль закрывают. Каким будет давление воздуха в баллоне после того, как восстановится его тепловое равновесие с окружающей средой?

3. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L и двух последовательно соединенных одинаковых конденсаторов емкостью C каждый. Один из конденсаторов заряжают до напряжения U_0, после чего цепь замыкают. Найдите зависимость от времени напряжения на этом конденсаторе после замыкания цепи. Предложите механический аналог этой электрической цепи.

4. Камера-обскура представляет собой непрозрачную коробку с маленьким круглым отверстием в одной из стенок и светочувствительной пленкой на противоположной стенке. Расстояние от отверстия до пленки L = 10 см. При каком диаметре отверстия эта камера будет давать наиболее четкие изображения предметов?

5. Какое из трех тел — брусок, диск или кольцо — быстрее съедет с наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α? Коэффициенты трения скольжения для всех трех тел одинаковы и равны μ. Радиусы диска и кольца одинаковы.

6. С горизонтального цилиндра радиусом R свисает намотанная на него нить, на конце которой закреплен небольшой грузик. Длина d свисающей части нити равна длине окружности цилиндра ($d=2\pi R$). Оцените минимальную скорость, которую нужно сообщить грузику, чтобы нить обернулась вокруг цилиндра, все время оставаясь натянутой.

7. В естественной смеси изотопов урана содержится 99,27% урана-238 и 0,73% урана-235. Измеренные периоды полураспада этих изотопов составляют T_1 = 4,47 млрд лет и T_2 = 0,704 млрд лет соответственно. Оцените возраст Земли, приняв, что при ее образовании содержание этих изотопов было примерно одинаковым. (Периодом полураспада называется промежуток времени, в течение которого распадается половина ядер данного элемента.)

ИСТОРИЯ НАУЧНЫХ ИДЕЙ И ОТКРЫТИЙ

1. Приведите примеры математических теорий или понятий, возникших в рамках «чистой математики» и нашедших спустя годы прямое применение в естественных науках и практике.

2. Приведите примеры, когда физический эксперимент или практические нужды людей вызывали развитие математических теорий.

3. 26-го ноября математики отмечали день памяти одного своего выдающегося коллеги. В мемуаре «Теория механизмов, известных под именем параллелограммов» он получил важнейшие результаты по математической проблеме, которую он там же и поставил и к разработке которой многократно возвращался. О каком разделе математики и о какой задаче идет речь? Что изучает эта наука, что означает и от кого пошло ее название? Какая работа этого ученого стала основополагающей в новой области знания?

4. В XVIII веке капитаны судов, шедших параллельными курсами на близком расстоянии, допустили столкновение и были отданы под суд. Однако суд не состоялся, и капитанов пришлось отпустить благодаря важному открытию в гидродинамике. Позже в морские уставы был введен параграф, который запрещал чрезмерное сближение судов, идущих параллельными курсами. О каком открытии идет речь, и кто его автор?

5. 26 ноября — день рождения крупного математика, известного, в частности, построением модели броуновского движения, названной его именем, но более всего тем, что он стал, можно сказать, отцом новой науки. О ком и о чем здесь идет речь? Что изучает эта наука, что означает и от кого пошло ее название? Какая работа этого ученого является основополагающей в новой области знаний?

6. Кому из выдающихся ученых принадлежат фундаментальные работы в описании броуновского движения и предсказании индуцированного излучения, используемого в современных лазерах? Какие еще работы этого ученого вы знаете, и за какую из них он получил Нобелевскую премию?

7. Как древние греки вычисляли размеры Земли, Луны и Солнца и расстояния от Земли до этих светил, или как, по-вашему, они могли бы это сделать? Кто и когда впервые произвел эти измерения?

8. При каких обстоятельствах математики испытали действительную нужду в мнимых числах? Кто были эти математики?

9. Известно, что современные науки в значительной степени стимулируются и финансируются нуждами военных. Попробуйте привести примеры такого влияния в науках далекого прошлого.

10. Для градуировки термометра по шкале Цельсия используются две точки: температура плавления льда и температура кипения воды. Почему изменение объема воды с температурой не используется для создания всей температурной шкалы от 0 до 100 градусов? Чем температурная шкала, предложенная самим Цельсием, отличается от современной шкалы Цельсия?

11. Имя, точнее прозвище, этого математика превратилось в общеизвестный математический термин, а из названия одного из его трудов возникло название крупного раздела математики. О ком и о чем идет речь? Назовите полное имя этого математика.

12. На надгробии того, кого называли «Rex Mathematicorum», изображен правильный N-угольник. Почему? Кто покоится в этой могиле? Чему равно N?

13. Кому из крупных ученых принадлежат фундаментальные работы, касающиеся как строения ядра, так и эволюции Вселенной? Зачем этот ученый в одну из своих работ включил соавтором будущего нобелевского лауреата Ханса Бете, хотя тот не имел отношения к данной работе?

В.Альминдеров, В.Дубровский, А.Егоров

Много битов из ничего

1. С одной стороны, без перебора мы умеем доказать, что не всякое нечетное число, большее трех, представимо в нужном виде, однако известное нам доказательство этого факта неэлементарно. С другой стороны, перебором можно добраться до наименьшего непредставимого числа — 149.

2. Поскольку реплики (π_1), (σ_1) в обоих диалогах совпадают, рассуждения трех первых разделов статьи остаются справедливыми. Таким образом, s_0 является элементом множества

$C = \{11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 53\}$,

причем все элементы множества C удовлетворяют условию (σ_1').

(π_2) означает

при любом разложении числа p_0 в произведение двух множителей, удовлетворяющих неравенствам (1), (2), их сумма обладает свойством (σ_1'). (π_2')

В статье доказано, что любое число, обладающее свойством (σ_1'), принадлежит C. Поэтому мы можем заменить (π_2') на

при любом разложении числа p_0 в произведение двух множителей, удовлетворяющих неравенствам (1), (2), их сумма принадлежит C. (π_2'')

Переберем все представления чисел из C в виде суммы двух слагаемых: $s = k + l$ $(2 \le k \le l)$ и проверим каждое произведение kl на выполнение (π_2''). Перебор сократится примерно вдвое, если предварительно при помощи (π_2'') доказать, что p_0 не делится на 4.

Результат перебора: только 4 числа из C дают нам разложения $s = k + l$, для которых kl удовлетворяет условию (π_2''):

$23 = 6 + 17$,

$35 = 13 + 22$,

$37 = 3 + 34 = 11 + 26 = 14 + 23$,

$53 = 2 + 51 = 7 + 46$.

Поскольку S и после реплики (π_2) не смог отгадать k_0 и l_0, $s_0 \ne 23$ и $s_0 \ne 35$. Итак, ввиду (σ_2), $s_0 = 37$ или $s_0 = 53$. Догадавшись об этом, P сумел определить k_0 и l_0. Следовательно, $p_0 = 11 \cdot 26 = 286$, так как, если бы у P было $102 = 3 \cdot 34 = 2 \cdot 51$ или $322 = 14 \cdot 23 = 7 \cdot 46$, он не смог бы выбрать между $37 = 3 + 34 = 14 + 23$ и $53 = 2 + 51 = 7 + 46$.

Итак, $s_0 = 37$, $p_0 = 286$, $k_0 = 11$, $l_0 = 26$.

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи

(см. «Квант» № 1)

1. Заметим, что первая страница должна иметь нечетный номер, а последняя — четный. Из возможных вариантов расположения цифр в номерах страниц: 134, 143, 314, 341, 413 и 431 нужно выбрать два, удовлетворяющих условию задачи. Это только 143 и 314. Итак, кусок содержит 314 — 142 = 172 страницы.

2. В слове языка Икнатсо на первом месте может стоять любая из указанных семи букв, на втором — любая из оставшихся шести и т.д. В результате получаем для количества слов число $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$. Чтобы ответить на два другие вопроса, заменим буквы цифрами: И — 1, К — 2, Н — 3, А — 4, Т — 5, С — 6, О — 7. Заметим теперь, что слова в словаре идут в порядке возрастания чисел, соответствующих этим словам. Слову Икнатсо соответствует число 1234567, слову Скоатни — число 6274531, следующее за ним число есть 6275134, поэтому следующее слово в словаре — «скотина». Самое большое из чисел здесь 7654321, а ему соответствует слово «останки».

3. КРОСС = 35977. 4. Выигрывает партнер начинающего. Для этого ему достаточно, используя рисунок 1, закрашивать каждый раз клетку, имеющую тот же номер, что и клетка, закрашенная перед этим начинающим.

5. Да, существуют, например, такие, как на рисунке 2.

1	2	3	4
5	6	7	8
1	2	3	4
5	6	7	8

Рис.1

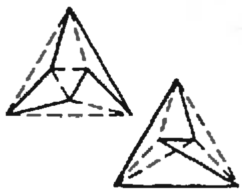


Рис.2

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» № 5 за 1994 г.)

1. Достаточно вычислить шесть первых членов этой последовательности: 439, 208, 130, 52, 91, 130, чтобы понять, что дальше числа будут периодически повторяться с периодом 3: 130, 52, 91. Поэтому 99-й член последовательности равен 130.

2. Здесь следовало разложить на простые множители 9 чисел: от 886 до 894. В каждом из разложений находится хотя бы одно двузначное или трехзначное простое число, поэтому эти числа не могут быть получены как произведение цифр некоторого числа. Отсюда следует, что искомых чисел нет.

3. Сумма площадей треугольников ABN, BCK, CDL и DAM равна половине произведения числа a — длины стороны квадрата — на сумму длин отрезков $AM + BN + CK + DL$, указанную в условии задачи (рис.3). С другой стороны, эта сумма равна удвоенной сумме площадей черных треугольников плюс сумма площадей белых четырехугольников. Поскольку сумма площадей черных треугольников равна площади центрального четырехугольника, то вся эта сумма равна площади квадрата. Приравнивая полученные выражения, получаем требуемое в задаче равенство.

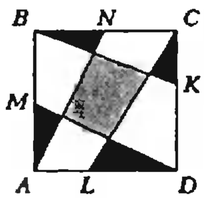


Рис.3

4. Пусть число D — наибольший общий делитель чисел A, B и C. Тогда $A = DA_1$, $B = DB_1$, $C = DC_1$. Подставим эти выражения в заданное соотношение и сократим на D^2. Получим $A_1(A_1 + B_1) = B_1(B_1 + C_1) = C_1(C_1 + A_1)$. Отсюда следует, что A_1^2 делится на B_1, B_1^2 делится на C_1, C_1^2 делится на A_1. Это может быть лишь в том случае, если все три числа A_1, B_1, C_1 по модулю равны единице. Действительно, если бы хотя бы одно из этих чисел имело простой множитель p, то его имели бы и все остальные числа, но их наибольший общий делитель равен 1. Осталось убедиться, что указанное равенство выполняется лишь в случае $A_1 = B_1 = C_1 = 1$ или $A_1 = B_1 = C_1 = -1$. Следовательно, числа A, B и C равны.

5. Ответ: 100 кнопок. Если нажать каждую кнопку по одному разу, то у каждой кнопки состояние изменится 19 раз и все кнопки окажутся погашенными. Покажем, что каждую кнопку необходимо нажать, чтобы погасить все кнопки. Возьмем произвольную кнопку K и рассмотрим все кнопки, стоящие с ней в одном горизонтальном или вертикальном ряду. Вместе с ней их будет 19. Если нажать одну из этих кнопок, но не кнопку K, то сменят состояние 10 кнопок из этих 19, а если нажать кнопку, не входящую в число этих 19, то сменят состояние две кнопки из 19. Отметим, что 10 и 2 — четные числа. В начале количество горящих кнопок на рассмотренном «кресте» было 19, а в конце их число должно равняться нулю, поэтому четность числа горящих кнопок «креста» должна измениться, что невозможно сделать, не нажимая на кнопку K.

Тригонометрические подстановки

1. Ответ: 0. Сделайте замену $a=\sin\alpha$, $b=\cos\alpha$, $c=\sin\beta$, $d=\cos\beta$.

2. Ответ: $(4/\sqrt{13};\ 6/\sqrt{13};\ 9/\sqrt{13};\ 6/\sqrt{13})$. Сделайте замену $x=2\sin\alpha$, $y=2\cos\alpha$, $z=3\sin\beta$, $t=3\cos\beta$.

3. Сделайте замену $x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $y=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $z=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ $(\alpha+\beta+\gamma=\pi)$. Тогда $\cos\alpha=\sin\beta=\cos\gamma$.

4. Сделайте замену $x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $y=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $z=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ $(0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$, $\alpha+\beta+\gamma=\pi)$.

5. Заметив, что $\left|\frac{c}{b}-\frac{c}{a}\right|\le\sqrt{\frac{c}{b}\left(1-\frac{c}{a}\right)}+\sqrt{\frac{c}{a}\left(1-\frac{c}{b}\right)}\le 1$, положите $\frac{c}{a}=\cos^2\alpha$, $\frac{c}{b}=\cos^2\beta$ $\left(0<\alpha,\beta\le\frac{\pi}{2}\right)$.

6. Ответ: $\left\{-\frac{\sqrt{5}+1}{4};\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right\}$. Сделайте замену $x=\cos\alpha$ $(0\le\alpha\le\pi)$.

7. Положив $x=\operatorname{tg}\alpha$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, получим $y=\operatorname{tg}2\alpha$, $z=\operatorname{tg}4\alpha$, $x=\operatorname{tg}8\alpha$. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}8\alpha$. Отсюда $\alpha=\frac{\pi n}{7}$ $(n=-3,-2,-1,0,1,2,3)$.

8. Ответ: $c=4\sin^2\frac{\pi}{2(2n-1)}$. Рассмотрите неотрицательные числа c, для которых неравенство
$$\left(a_1-a_2\right)^2+\left(a_2-a_3\right)^2+\ldots+\left(a_{n-1}-a_n\right)^2\ge c\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)$$
справедливо для любых вещественных чисел $a_2,a_3,\ldots,a_n$ и $a_1=0$. Наибольшее из таких c и будет ответом задачи.

9. Сделайте замену $\frac{b}{a}=\sin\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

10. Перепишем неравенство в виде
$$\sqrt{\frac{a}{d}\left(1-\frac{b}{d}\right)\left(1-\frac{c}{d}\right)}+\sqrt{\frac{b}{d}\left(1-\frac{a}{d}\right)\left(1-\frac{c}{d}\right)}+\sqrt{\frac{c}{d}\left(1-\frac{a}{d}\right)\left(1-\frac{b}{d}\right)}\le 1+\sqrt{\frac{a}{d}\cdot\frac{b}{d}\cdot\frac{c}{d}}.$$
Положим $\frac{a}{d}=\sin^2\alpha$, $\frac{b}{d}=\sin^2\beta$, $\frac{c}{d}=\sin^2\gamma$ $\left(0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2}\right)$. Получаем $\sin(\alpha+\beta+\gamma)\le 1$.

11. $x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $y=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $z=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ $(\alpha+\beta+\gamma=\pi)$. Получаем $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

12. Ответ: 4 корня. Сделайте замену $x=\cos\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

13. Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right\}$. Сделайте замену $x=\cos\alpha$ $(0\le\alpha\le\pi)$.

14. Пусть $h_n=\sin\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, тогда $h_{n+1}=\sin\frac{\alpha}{2}$. Так как $h_1=\sin\frac{\pi}{6}$, то $h_n=\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}$. Поэтому
$$h_1+h_2+\ldots+h_n=\frac{1}{2}+\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^2}+\ldots+\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}<$$
$$<\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3\cdot 2^2}+\ldots+\frac{\pi}{3\cdot 2^n}<\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}<\frac{3+3{,}15}{6}<1{,}03.$$

15. Ответ: существует. Положите $x_1=\cos\alpha$, $x_2=\cos 2\alpha$, $x_3=\cos 4\alpha,\ldots,$ $x_{100}=\cos 2^{99}\alpha$, где $\alpha=\frac{2\pi}{2^{99}-1}$.

16. Сделайте замену $a=\operatorname{tg}\alpha_1$, $b=\operatorname{tg}\alpha_2$, $c=\operatorname{tg}\alpha_3$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3<\frac{\pi}{2}\right)$.

17. Положите $x_1=\operatorname{tg}\alpha$ $(\alpha=\operatorname{arctg}2)$. По индукции легко доказать, что $x_n=\operatorname{tg}n\alpha$.

Когда кипит вода?

1. $t_1=98{,}66\ ^\circ$C. 2. $m_r=\frac{0{,}8\rho V}{\rho RT/(Mp)-1}=60$ г.

3. $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{p_\phi}{4p_n}=\frac{3}{7}$. 4. $\gamma=\frac{\beta-\alpha}{(\varphi\beta-1)\alpha}=\frac{5}{12}$.

Однородные уравнения

1. $x_1=\frac{190}{63}$; $x_2=\frac{2185}{728}$. *Указание*. Положите $u=\sqrt[4]{|x-2|}$, $v=\sqrt[4]{|x-3|}$.

2. $x_1=2$; $x_2=-2$. *Указание*. Перейдите к логарифмам по основанию 2. Положите $u=5^{\log_2 x^2}$; $v=3^{\log_2 x^2}$.

3. $x_1=4$; $x_2=2$. *Указание*. Положите $u=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2(x^2-6x+9)}$; $v=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2(x^2-6x+9)}$, тогда $uv=1$.

4. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\frac{5\pi}{12}+\pi m$ (k, m — целые).

5. $x=\frac{1}{4}\arccos\frac{3}{5}+\frac{\pi k}{2}$ (k — целое).

6. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=-\operatorname{arctg}3+\pi n$ (n, k — целые).

7. $x=18$, $y=8$. *Указание*. Разделите первое уравнение на второе. Получится уравнение относительно $\sqrt{\frac{x}{y}}$.

8. $x_1=2$, $y_1=1$, $x_2=-2$, $y_2=-1$.

9. $x=-1$. *Указание*. Положите $u=3^x$; $v=5^x$.

10. Вода подается быстрее в два раза. *Указание*. Легко найти концентрацию кислоты в растворе, подаваемом по второй трубе (15%). Обозначив через x скорость подачи жидкости по первой трубе, y по второй, получим однородное уравнение.

11. $x_1=26$, $x_2=7$. *Указание*. Сократите выражение, стоящее в левой части, на $\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}$ и положите $u=\sqrt[3]{34-x}$, $v=\sqrt[3]{x+1}$. Получится система уравнений
$$\begin{cases}u^2v+uv^2=30,\\ u^3+v^3=35.\end{cases}$$

13. $x=-2$.

14. $x_1=-1$, $x_2=9$. *Указание*. Введите неизвестные $v=2^x$, $u=\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x-9}}\right)$.

Уравнение станет однородным относительно u и v:

$u^2+v^2=2uv$.

15. $x=1$, $y=-1$. *Указание*. Положите $u=2^{\frac{x-y}{2}}$; $v=2^{\frac{x+y}{2}}$, тогда $uv=2^x$.

16. $x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$. *Указание*. Воспользуйтесь равенством:

$x^3+2=(x+1)+(x^3-x+1)$.

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. Определено и равно -2.

2. $-15/4$; -3; $-7/4$. *Указание*. Выполните замену $y=\sqrt{x+4}$.

3. $\frac{1}{2}+\frac{10\sqrt{6}}{49}+\arcsin\frac{4\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{14}$. *Указание*. Докажите, что треугольник ABC — остроугольный, $\angle ACB=\pi/4$, после чего найдите AC, пользуясь теоремой косинусов и тем, что $AC>AB$. Требуемая площадь равна сумме площадей сектора AOC и двух треугольников AOB и BOC.

4. $(3-\log_2 5;+\infty)$. *Указание*. Задача сводится к решению совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l}3x-4>0,\\ \log_2\left(5\cdot 2^{2x-4}-2^{x-1}+1\right)>0.\end{array}\right.$$

5. $8\sqrt{6}$. *Указание*. Из условия следует, что $\cos\angle SAB\le -1/5$, а это означает, что $\sin\angle SAB\le\frac{\sqrt{24}}{5}$. Но

$V_{SABC}\le\frac{1}{3}BC\cdot S_{ABS}\le\frac{1}{6}BC\cdot AB\cdot SA\sin\angle SAB\le 8\sqrt{6}$.

Если BC перпендикулярно плоскости ASB и $AB=5$, $SA=4$, $SB=7$, $BC=6$, то предыдущие неравенства превращаются в равенства, причем остальные ограничения тоже выполняются.

6. $\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{4}\right)\cup\left\{\frac{\pi}{3}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Указание. Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}1+2\cos x=0,\\ \sin x=\sin\alpha.\end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности имеет на отрезке $\left[-\frac{7\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ три корня: $-4\pi/3$; $-2\pi/3$; $2\pi/3$. Теперь рассмотрите график функции $y=\sin x$ и выясните, при каких $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ уравнение $\sin x=\sin\alpha$ имеет 2 корня на нужном промежутке, не совпадающих с уже найденными.

Вариант 2

1. $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$. 2. $(\log_3(2/3);1/6)$. 3. $[-1/3;0)\cup(1/5;(3-\sqrt{3})/6)$. *Указание*. Преобразуйте неравенство к такому виду

$$\frac{1}{\log_6(2-5x)}\le\frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)},$$

после чего убедитесь, что оно эквивалентно совокупности из двух систем

$$\begin{cases}1>2-5x>0,\\ 1>6x^2-6x+1>0,\\ 2-5x\ge 6x^2-6x+1\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}2-5x>1,\\ 1<6x^2-6x+1\le 2-5x.\end{cases}$$

4. $\sqrt{a(a-b)}$. *Указание*. Докажите, что треугольники AEF и EDF подобны ($\angle DEF=\angle BCE=\angle EAD$).

5. $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$. *Указание*. Пусть E, F, G и H — точки касания сферы с отрезками DA, DC, DD_1 и BC_1 соответственно. Центр O сферы лежит на диагонали DB куба (для доказательства воспользуйтесь тем, что $DE=DG=DF$, треугольник EFG — правильный, а диагональ B_1D перпендикулярна отрезкам FG, GF и EF). Кроме того, точка O лежит в плоскости A_1B_1CD, так как эта плоскость проходит через прямую DB_1 и перпендикулярна BC_1. Значит, H — центр грани BCC_1B_1. Пусть r — радиус сферы, т.е. $OH=r$. Выразите через r отрезок B_1O и запишите теорему косинусов для треугольника B_1OH.

6. $x=0$, $x=1$ при $a=0$;

$x=\frac{1-a+\sqrt{3a^2+1}}{2}$ при $a\in(-2/\sqrt{3};0)\cup(0;2/\sqrt{3})$,

$x_1=\frac{1-a+\sqrt{1+3a^2}}{2}$, $x_2=\frac{1-a+\sqrt{3a^2-3}}{2}$ при

$a\in(-\infty;-2/\sqrt{3})\cup(2/\sqrt{3};+\infty)$.

Указание. После замены $y=x+\frac{a}{2}$, $b=3a^2/4$ уравнение приводится к виду $y^2-b=\sqrt{y+b}$, из которого после замены $z=\sqrt{y+b}$ приходим к системе

$$\begin{cases}y^2-b=z,\\ z^2-b=y,\\ z\ge 0.\end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $(y-z)(y+z)=z-y$, т.е. либо $y=z$, либо $y+z=-1$. Дальнейшее ясно.

Вариант 3

1. $-2/3$; $-4/3$. *Указание*. Выполните замену $t=|x+1|$.

2. $4\sqrt{5}/9$. 3. $[0;+\infty)$. *Указание*. После замены $t=3^{x+1}$ неравенство принимает вид $\sqrt{1+t}\ge 5-t$. 4. $1/\sqrt{2}$. *Указание*. Докажите, что треугольник PFQ — равнобедренный. 5. 1; $17/16$. *Указание*. Пусть $\log_3 c_k=u_k$. Тогда $u_1=1$, $u_5=1/25$,

$u_k(u_{k+1}+u_{k-1})=2u_{k+1}u_{k-1}(u_k+1)$ при $k=2, 3, 4$. Если одно из чисел u_2, u_3, u_4 равно 0, то $u_2=u_3=u_4=0$ и $c_2=c_3=c_4=1$.

Если $u_k\ne 0$ при $k=2, 3, 4$ и $v_k=1/u_k$ и система приводится к виду

$$\begin{cases}v_1=1, v_2=25,\\ v_{k+1}-2v_k+v_{k-1}=2, k=2,3,4,\end{cases}$$

полученная система — линейная и легко решается.

6. $\sqrt{217}$. Пусть $PR=b$, $QR=a$, $SR=c$, $SN\perp RA$, $\angle SRN=\gamma$, $\angle QRA=\delta$. Тогда

$(a\sin\delta+b\cos\delta+c\sin\gamma)^2=2(a^2+b^2+c^2)$.

Левую часть этого равенства можно оценить так:

$$(a\sin\delta+b\cos\delta+c\sin\gamma)^2=\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin(\delta+\varphi)+c\sin\gamma\right)^2\le$$
$$\le\left(\sqrt{a^2+b^2}+c\right)^2\le 2(a^2+b^2+c^2),$$

где $\varphi=\mathrm{arctg}\,b/a=\angle PQR$. Таким образом, выполнение условий задачи означает, что

$\sin(\delta+\varphi)=1$, $\sin\gamma=1$, $a^2+b^2=c^2$

или

$\delta+\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\gamma=\frac{\pi}{2}$, $a^2+b^2=c^2$.

Отсюда следует, что $SR=17$, $SR\perp RA$, $PQ\perp RA$, $a^2+15^2=17^2$, $QR=a=8$, и, наконец,

$SQ=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos 60^\circ}=\sqrt{217}$.

Вариант 4

1. $(-1)^n\frac{1}{5}\arcsin\left(2-\sqrt{5}\right)+\pi n/5$, $n\in Z$. 2. $x=4$; $5\le x\le 8$. *Указание.* После замены $t=\sqrt{x-4}$ приходим к неравенству $\left|t^2-3\right|\le 3-t$, которое равносильно системе $t-3\le t^2-3\le 3-t$.
3. $2\pi n$, $n\in Z$, $n<0$. *Указание.* Пусть $t=\log_3\cos v$. Тогда неравенство преобразуется к виду $t^2\le 0$.
4. 44. Докажем, что $l^2=ac-b_ab_c$ (рис.4).
Из теоремы косинусов для треугольников ABB_1 и CBB_1 получаем, что

$$\begin{cases}b_c^2=c^2+l^2-2lc\cos\beta,\\ b_a^2=a^2+l^2-2la\cos\beta,\end{cases}$$

или $b_c^2a-b_a^2c=ac^2-a^2c-l^2(c-a)$. Учитывая, что $b_ca=b_ac$, имеем $l^2(a-c)=(ac-b_ab_c)(a-c)$. Если $a=c$, то $b_a=b_c=b/2$, и $l^2=a^2-b^2/ac-b_ab_c$, если же $a\ne c$, то $l^2=ac-b_ab_c$, что и требовалось доказать.
Пусть теперь $BE=x$, $AC=y$. Тогда (рис.5):

$$\begin{cases}xy=90,\\ 18y-5x=240,\end{cases}$$

откуда $x=6$, $y=15$.

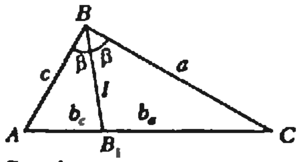


Рис. 4

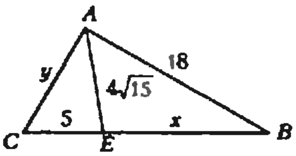


Рис. 5

5. $6+2\cdot 6^{-24}$. *Указание.* Если A_n — количество лекарства в организме после n-й инъекции, то $A_1=8$, $A_{n+1}=\frac{1}{6}A_n+5$. Нетрудно видеть, что $A_{n+1}-A_n=\frac{1}{6}\left(A_n-A_{n-1}\right)$, т.е. что последовательность $u_n=A_n-A_{n-1}$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $1/6$. Поэтому $u_n=u_1\cdot 6^{-n}$, а $A_n=u_n+c$, где c — некоторая константа, которую нетрудно найти.
6. $\sqrt{247}$. *Указание.* Из условия следует, что все грани пирамиды имеют одинаковые площади, а отсюда, в свою очередь, получается, что они равны. Эта достаточно известная теорема стереометрии может быть доказана, например, так.
Пусть $ABCD$ — тетраэдр, площади всех граней которого равны. Проведем через ребро CD плоскость π, параллельную ребру AB, и рассмотрим ортогональную проекцию $A'B'$ ребра AB на плоскость π. Поскольку равны площади треугольников ABD и ABC, то равны и высоты этих треугольников, опущенные из вершин C и D на AB. Поэтому равны и проекции этих высот на плоскость π. Следовательно, точки C и D одинаково удалены от прямой $A'B'$. А так как CD и $A'B'$ не параллельны, отрезок $A'B'$ пересекает CD в его середине P. Аналогично доказывается, что точка P — середина $A'B'$. Таким образом, четырехугольник $A'CB'D$ — параллелограмм. А так как $A'C=B'D$, $A'D=B'C$, то и $AC=BD$, $AD=BC$ (из равенства проекций следует равенство самих отрезков, так как концы A и B их лежат на одинаковых расстояниях от плоскости π). Аналогично доказывается, что $AB=CD$. Итак, все грани тетраэдра равные остроугольные (подумайте, почему) треугольники.

Вариант 5

1. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. 2. 3. 3. 4. 4. $\arccos\frac{3}{5}$, $\arcsin\frac{3}{5}$. *Указание.* Пусть a и b — катеты, r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей. Воспользуйтесь тем, что $2R+2r=a+b$.
5. $(1/2;\ 11/2)$, $(3/2;\ 11/2)$. Так как $y-5=|x+1|$, то $y-5\ge 0$ и $|y-5|=y-5$.
6. $\sqrt{\frac{a^2+c^2}{5}}$. *Указание.* Удобно достроить треугольник до двух параллелограммов, в каждом из которых одной из диагоналей будет удвоенная медиана. Таким образом, два уравнения получаются по свойству параллелограмма: сумма квадратов его диагоналей равна сумме квадратов его сторон. Третье уравнение получается из теоремы Пифагора для треугольника со сторонами b, $(2/3)m_1$ и $(2/3)m_2$.
7. $0<a<1/8$. *Указание.* Уравнение имеет четыре различных корня относительно x, если это же уравнение как квадратное относительно $y=|x+1|$ имеет два различных положительных корня, т.е. когда $D=1-8a>0$ и $2a>0$.
8. $Sd/3$. Объем указанного многогранника равен $2/3$ объема призмы, так как многогранник получается отсечением от призмы двух треугольных пирамид. Их основания в сумме составляют основание призмы, а высоты равны высоте призмы.
Объем призмы равен произведению площади ее сечения плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, на длину бокового ребра.
Пусть a и b — основания трапеции, являющиеся упомянутым сечением. Высота этой трапеции дана (она равна d — расстоянию между параллельными боковыми гранями призмы). Итак, объем призмы равен

$$V=S_{\text{сеч}}\cdot l=\left[\frac{1}{2}(a+b)d\right]l=\left(\frac{1}{2}al+\frac{1}{2}bl\right)\cdot d=$$

$$=\left(\frac{1}{2}S_{AA_1D_1D}+\frac{1}{2}S_{BB_1C_1C}\right)\cdot d=\frac{1}{2}S\cdot d.$$

Окончательно,

$$V_{BDA_1B_1C_1D_1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}Sd=\frac{Sd}{3}.$$

Вариант 6

1. $(1/2;1)$. 2. $\arccos\left(5/\sqrt{29}\right)\pm\arccos\left(3/\sqrt{29}\right)+2k\pi$, $k\in Z$.
3. 1; 3. 4. $\frac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}$; $\frac{2mn}{\sqrt{4m^2-n^2}}$. 5. 2, 2^{-7}. 6. $\sqrt{m^2+n^2}$. *Указание.* Отложите от точки A хорду $AD'=CB$ и убедитесь в том, что $\angle D'AD$ — прямой. 7. $a\le 20$. *Указание.* Промежуток между корнями квадратного трехчлена $f(x)=-x^2+12x-a$ имеет общие точки с лучом $x\le 2$ тогда и только тогда, когда $f(2)\ge 0$.
8. $2a^2\sqrt{3}/(27\cos\alpha)$. *Указание.* Убедитесь в том, что рассматриваемое сечение — прямоугольник со сторонами, параллельными SA и BC.

Вариант 7

1. 0. 2. $(1;+\infty)$. 3. $2\pi k$, $\pi(4k-1)/2$, $k\in Z$. 4. 9,12. 5. $(1;-\pi/2)$.
Указание. Первое уравнение — квадратное относительно x с дискриминантом $4\left(\sin^2y-1\right)$, неотрицательным лишь при $\sin^2y\ge 1$, т.е. при $|\sin y|=1$, или $y=\frac{\pi}{2}+\pi n$, причем $|x|=1$. Из второго уравнения получаем $8y\left(1+y^2\right)+\pi^3+4\pi=0$. Последнее равенство выполняется лишь при $n=-1$ (при $n<-1$ левая его часть отрицательна, а при $n\ge 0$ — положительна).

Вариант 8

1. $(4;1)$, $(-2/3;\ 10/3)$. 2. Второе, так как $\sqrt{11}<10/3$.
3. $47/24$; $55/24$; $71/24$. 4. $18/\left(25+2\sqrt{130}+\sqrt{445}\right)$. *Указание.* Найдите высоту трапеции и ее диагонали, площадь треугольника CBE и его стороны, затем воспользуйтесь равенством $S=rp$.
5. $\left[3-\sqrt{6};2\right]\cup\left[5;3+\sqrt{6}\right]$. *Указание.* Запишите левую часть неравенства так:
$f(a,x)=k(x)a+b(x)$, где $k(x)=-3x^2+13x-13$,

$b(x)=4x^2-27x+3$. При каждом фиксированном x функция $f(a;x)$ — линейная. Поэтому неравенство $f(a;x)>0$ выполняется при всех $a\in(1;3)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1;x)\ge 0,\\ f(3;x)\ge 0.\end{cases}$$

Осталось решить полученную систему.

Вариант 9

1. πk; $\pi(4k+1)/2$, $k\in Z$. 2. $(-1;\ 23/2)$, $(2;1)$.
3. $\left[(7-\sqrt{33})/2;3\right)$. 4. $a=2$, $b=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; $a=-2$, $b\in(-\infty;+\infty)$. *Указание*. Второе неравенство имеет решение при $|a|\ge 2$. Если $a<-2$, первое неравенство выполняется при всех x, а при $a>2$ оно вообще не имеет решений. Осталось проверить $a=2$ и $a=-2$.
5. $(\sqrt{54}-2)/4$. *Указание*. Пусть $\alpha=\angle ADP$. Тогда $\angle BCP=\alpha$, $PC=1/(2\sin\alpha)$, $AD=1/\sin\alpha$. Из точки M опустим перпендикуляр MK на AC. Тогда $KP=1/2$, $CK=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sin\alpha}$, $MK=\frac{1}{2}PD=\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\alpha$. Из теоремы Пифагора $CK^2+MK^2=CM^2$ находим $\sin\alpha$, а затем и AD.

Вариант 10

1. Первое. 2. $5/2$. При $a\ge 0$, $b\ge 0$, $7a\ne 13b$. 3. $(-\infty,-7)$. 4. $\pm 1+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 5. $\sqrt{7}$; $49\sqrt{7}$. 6. $\left[\sqrt{10},0\right)\cup\left(0,\sqrt{10}\right]$. 7. $\sqrt{5}$.
8. Второе поле.

Вариант 11

1. $6,(32)=626/99<2\sqrt{10}$. 2. 15. *Указание*. Избавьтесь от иррациональности в знаменателях дробей. 3. -6; 7. *Указание*. Выполните замену $y=\sqrt{z^2-z-42}$. 4. $\pi n/12$, $(6n\pm 1)/24$, $n\in Z$.
5. $(-6;\ -3)$. 6. $2\pi n<x<\pi+2\pi n$, $n\in Z$. 7. 83,2%.
8. *Указание*. Пусть a, b, c, d — длины сторон AB, BC, CD и AD четырехугольника $ABCD$. По условию $a+c=b+d$, $a-c=b-d$, откуда следует, что $a=b$, $c=d$, а треугольники ABC и BCD равны. Значит, равны углы A и C, но $\angle A+\angle C=180°$.
9. 50 млн. т. *Решение*. Пусть x, y, z, t объемы добычи медной руды за 1 месяц соответственно первой, второй, третьей и четвертой бригадами, тогда искомая величина равна $5(x+y+z+t)$. В силу условий задачи (так как, в частности, 4+3+2+3=12; 1+2+5+4=12; 3+2+2+3=10; в году 12 месяцев), выражая объемы добычи руды в первый, второй и третий годы через x, y, z, t, мы получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x+3y+2z+3t=30,\\ x+2y+5z+4t=22,\\ 3x+2y+2z+3t=21.\end{cases}$$

Для определения суммы $x+y+z+t$ умножим первое уравнение на $\alpha=3$, второе уравнение — на $\beta=1$, третье уравнение — на $\gamma=-2$ и все их сложим; получим $7(x+y+z+t)=70$, откуда $x+y+z+t=10$, т.е. $5(x+y+z+t)=50$.

Замечание. Числа α, β, γ являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} 4\alpha+\beta+3\gamma=3\alpha+4\beta+3\gamma,\\ 3\alpha+2\beta+2\gamma=3\alpha+4\beta+3\gamma,\\ 2\alpha+5\beta+2\gamma=3\alpha+4\beta+3\gamma,\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}\alpha=3\beta,\\ \gamma=-2\beta,\\ \beta=\alpha+\gamma,\end{cases}$$

которой удовлетворяют, например, $\alpha=3$, $\beta=1$, $\gamma=-2$.

10. $\sqrt{3}/8$; 2:1. *Указание*. Плоскость $C'BD$ перпендикулярна диагонали $A'C$, параллельная ей плоскость $AB'D'$ также перпендикулярна $A'C$. Пусть K и L — точки пересечения упомянутых плоскостей с $A'C$ соответственно, тогда $A'L=LK=KC$, так как эти отрезки являются проекциями на $A'C$ равных и параллельных отрезков $A'A$, $D'D$ и $C'C$.

Вариант 12

1. πn, $\pi(8n\pm 1)/4$, $n\in Z$. 2. 1. 3. $\left((\sqrt{5}-1)/2;1\right)$. 4. $4/\sqrt{17}$. *Указание*. Докажите, что $CN\perp FD$. 5. $[2;3)\cup(3;4]$. График левой части уравнения $3-\sqrt{1-(x-3)^2}=a-\sqrt{1-(x-a)^2}$, равносильного исходному, есть нижняя единичная полуокружность с центром в точке $(3;\ 3)$, а график правой части — такая же полуокружность, но с центром $(a;\ a)$. Двигая параметр a по числовой оси в сторону возрастания, получим, что указанные графики впервые пересекаются, причем имеют единственную общую точку, при $a=2$. Эта ситуация сохраняется при дальнейшем увеличении a (кроме случая $a=3$, когда полуокружности сливаются) до значения $a=4$, а затем графики расходятся и не имеют общих точек.

Вариант 13

1. $(-3;\ -5)$, $(0;\ 0)$, $(3;\ 5)$. 2. $[-3;0]$. 3. $2\pi n$, $n\ge -1$; $\pi+2\pi m$, $m\le -3$. *Указание*. Уравнение равносильно системе $\cos^2 x=1$, $(x+10)\cos x>0$. 4. $(x+2)^2+(y-4)^2=13$. *Указание*. Неравенство задачи на плоскости $(x,\ y)$ — параллелограмм. Искомая окружность построена на его большей диагонали как на диаметре. 5. 300 или 600 телевизоров. *Указание*. Ежемесячная прибыль при изготовлении телевизоров составляет не более чем

$$f(n)=\begin{cases} -0{,}3n^2+180n, & \text{если } n\le 450,\\ -0{,}3n^2+360n-81000 & \text{при } n\ge 450.\end{cases}$$

Максимальные значения первого и второго трехчленов достигаются соответственно при $n=300$ и $n=600$, при этом $f(300)=f(600)=27000$.
6. 5:9. *Указание*. Пусть $a=AB$, $b=AC$, $p=CK$, $q=KM$, $c=CD$, $d=DK$, $x=AD$, $\alpha=\angle ABD$, $\beta=\angle ACD$, $\gamma=\angle CMD$, $\delta=\angle ADB$, $\varphi=\angle ADC$ (рис.6).

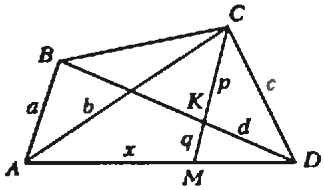


Рис. 6

Применяя теорему синусов к треугольникам ABD, ACD, CMD и CKD, получим, что

$$a\cdot\sin\alpha=x\cdot\sin\delta,\quad b\cdot\sin\beta=x\cdot\sin\varphi, \tag{1}$$

$$(p+q)\cdot\sin\gamma=c\cdot\sin\varphi,\quad q\cdot\sin\gamma=d\cdot\sin\delta. \tag{2}$$

По условию $\alpha+\beta=180°$, поэтому $\sin\alpha=\sin\beta$ и из (1) следует равенство

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\delta}{\sin\varphi}. \tag{3}$$

С другой стороны, из (2) имеем

$$\frac{q}{p+q}\cdot\frac{c}{d}=\frac{\sin\delta}{\sin\varphi}.$$

Отсюда и из (3) получаем соотношение

$$\frac{a}{b}=\frac{q}{p+q}\cdot\frac{c}{d},$$

в которое остается подставить заданные отношения $c/d = 5/3$ и $p/q = 2$.

Вариант 14

1. Верно. *Указание.* Пусть $a = \sqrt{9\log_2 5 + 28}$. Достаточно проверить неравенство $4 < a < 7$. 2. $(1; -1)$, $(-1/5; 7/5)$.

3. $(4-\sqrt{2})/6$. Поскольку CL — биссектриса угла C, $AC:BC = (7+1):(7-1) = 4/3$, откуда следует, что тупым может быть только угол B (ибо $\angle B > \angle A = 45° \Rightarrow \angle B + \angle A > 90°$). Обозначив $AC=4x$, $BC=3x$, получаем по теореме косинусов для треугольника ABC два варианта: $x = 4\sqrt{2} \pm 2$. В силу неравенства $\angle C < 45° = \angle A$ и вытекающего из него $BC>AB=14$, сохраняем только знак плюс. Наконец, по теореме синусов имеем

$$\sin\angle C = \sin\angle A\cdot\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{14}{3(4\sqrt{2}+2)}.$$

4. $21/23$ (рис.7). Пусть $AA_1 = x$, тогда по свойству секущих SA и SB имеем

$$SB_1 = \frac{SA_1\cdot SA}{SB} = 3x\sqrt{\frac{7}{11}}.$$

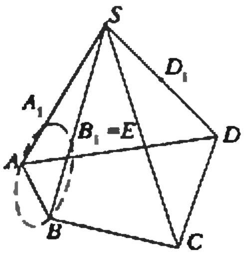


Рис. 7

Сечения плоскостью SBD обеих сфер проходят через точки B, D и D_1, а значит, совпадают. Поэтому $B_1 = E$ и

$$\frac{SE}{BB_1} = 3x\sqrt{\frac{7}{11}} : \left(4x\sqrt{\frac{11}{7}} - 3x\sqrt{\frac{7}{11}}\right) = \frac{7\cdot 3}{11\cdot 4 - 7\cdot 3}.$$

5. 432. Если в первом корпусе n аудиторий, а во втором — m, то условие задачи записывается уравнением $3n^2 = 2m^3$. Но тогда n кратно 2, а m кратно 3, поэтому замена $n = 2n_1$, $m = 3m_1$ приводят к уравнению в натуральных числах

$$3\cdot 4n_1^2 = 2\cdot 27m_1^3 \Leftrightarrow 2n_1^2 = 9m_1^3.$$

Сделав аналогичную замену $n_1 = 3n_2$, $m_1 = 2m_2$, получаем уравнение

$$2\cdot 9n_2^2 = 9\cdot 8m_2^3 \Leftrightarrow n_2^2 = 4m_2^3,$$

которое выполняется при наименьшем натуральном значении $n_2 = 2$, откуда наименьшее значение величины $3n^2$ равно $3(2\cdot 3\cdot n_2)^2 = 432$.

Вариант 15

1. 5. 2. 0; -2. 3. 30°. 4. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 5. 3. 6. $a = (1-\sqrt{2})/2$.

ФИЗИКА

Физический факультет

1. $F_н = F\dfrac{m_2}{(m_1+m_2)(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}$. 2. $\alpha = \mathrm{arctg}(1/\mu)$.

3. $T = \pi\sqrt{m/k}$. 4. $Q = 5/3A$. 5. $T_2 = T_1\dfrac{\alpha T_1 - p_1}{\alpha T_1 - p_1 - mRT_1/(MV)}$.

6. $F = 4F_0$. 7. $U_2 = U_1 m_2/m_1$. 6. $R = r\dfrac{U_2}{kU_1 - U_2} = 1300$ Ом.

9. $f = R\dfrac{n}{\sqrt{n^2-1}}$. 10. $x = \lambda F/d = 0{,}2$ см.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $a > g\dfrac{\mu + \mathrm{tg}\alpha}{1 - \mu\,\mathrm{tg}\alpha} = 10{,}6$ м/с^2.

2. $Q = (m_1 - m_2)gh - 2(m_1+m_2)h^2/\tau^2 = 92$ Дж.

3. $m = (T_2 - T_1)/(6g) = 0{,}02$ кг.

4. $F = Mg\sqrt{\sin^2\alpha + (1/2\cos\alpha + H/L\sin\alpha)^2}$.

5. $A = p_1V_2 + \dfrac{3}{2}p_2V_2 - \dfrac{5}{2}p_1V_1 = 18{,}8$ кДж.

6. $Q = \dfrac{1}{2}(p_0S + Mg)(H(3\alpha+2) - 5h) = 210$ Дж.

7. $v = nQ(T_1 - T_2)/(FT_1) = 2$ м/с. 8. $\alpha = 2 + P_1/P_2 + P_2/P_1 = 4{,}5$.

9. $Q = \dfrac{C\mathcal{E}^2}{2}\dfrac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2} = 0{,}2$ Дж. 10. $h = d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}/\sin\alpha = d\sqrt{3}$.

Химический факультет

1. $r = R\sqrt{1 + \dfrac{8\pi^2 h}{gT^2}} = 16{,}2$ м. 2. $N = \dfrac{1}{2}mg\sin 2\alpha = 0{,}49$ Н.

3. $N = g\left(M + \dfrac{4m_1m_2}{m_1+m_2}\right) = 16{,}4$ Н. 4. $v \le \sqrt{3gL/2} = 3$ м/с.

5. $N = \dfrac{1}{12}(3\rho - 4\rho_0)gLS = 5\cdot 10^{-4}$ Н.

6. $\Delta m = \dfrac{2MV_1V_2|p_1 - p_2|}{(V_1+V_2)RT} = 9$ г. 7. $\dfrac{Q}{m} = \dfrac{\pi\varepsilon_0 aL^2}{2|q|} = 10^{-4}$ Кл/кг.

8. $|q| = (C_1 + C_2)(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) = 12{,}5\cdot 10^{-6}$ Кл.

9. $a = \dfrac{e}{m}B\sin\alpha\sqrt{2\dfrac{e}{m}(\varphi_1 - \varphi_2)} = 2\cdot 10^{12}$ м/с^2.

10. $x = \dfrac{Ad}{d-F} = 0{,}6$ см.

Новосибирский государственный университет

Вариант 1

1. Перед началом движения справедливо равенство

$$2mg\sin\alpha = (\mu_1 + \mu_2)mg\cos\alpha,$$

откуда

$$\mathrm{tg}\alpha = (\mu_1 + \mu_2)/2.$$

Из условия равновесия для нижнего тела получаем

$$T = mg\cos\alpha\cdot(\mathrm{tg}\alpha - \mu_1),$$

поэтому

$$T = \frac{mg(\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{4 + (\mu_1 + \mu_2)^2}} \text{ при } \mu_2 > \mu_1.$$

2. Пусть удельное сопротивление жидкости ρ. Тогда $R_0 = \rho d/S$, где S — площадь пластин. Если пренебречь искривлением силовых линий при подаче напряжения на пластины при введенной в жидкость фольге и считать поле во всех участках жидкости однородным, то получим схему, изображенную на рисунке 8, где

$$R_1 = \frac{2\rho d_1}{S},\ R_2 = \frac{2\rho d_2}{S},\ R_3 = \frac{2\rho(d-d_1)}{S},\ R_4 = \frac{2\rho(d-d_2)}{S}.$$

Отсюда получаем

$$R = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4} = \ = \frac{2R_0}{d}\left(\frac{d_1d_2}{d_1+d_2} + \frac{(d-d_1)(d-d_2)}{2d-d_1-d_2}\right).$$

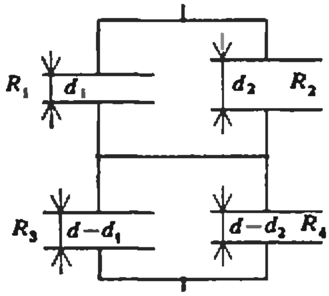


Рис. 8

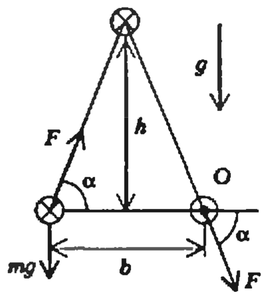


Рис. 9

3. Пусть сила взаимодействия провода и одной стороны рамки с током, параллельной проводу, равна F (рис.9). Тогда сила, сообщающая рамке ускорение, направленное вдоль поверхности стола, равна

$$F_x = 2F\cos\alpha .$$

Рамка не отрывается от поверхности стола при равенстве моментов силы тяжести и силы магнитного взаимодействия относительно оси, проходящей через точку O:

$$mgb = 2F\sin\alpha \cdot b ,$$

где m — масса рамки. Из второго закона Ньютона имеем

$$a = \frac{F_x}{m} - \mu g = g\left(\frac{b}{2h} - \mu\right).$$

4. Аквалангист дышит воздухом через редуктор при давлении $p_0 = 5$ атм. Объем баллона $V = 10$ л, давление в нем по условию составляет $p = 100$ атм. Отсюда получаем оценку эффективного объема для дыхания:

$$V_{эфф} = \frac{Vp}{p_0} \sim 200 \text{ л}.$$

Частоту дыхания по порядку величины будем считать такой же, как в обычных условиях: $\nu \sim 10$ вдохов в минуту. Положив объем одного вдоха при неглубоком дыхании $V_0 \sim 1$ л, найдем искомое время:

$$t \sim \frac{V_{эфф}}{\nu V_0} \sim 20 \text{ мин}.$$

5. Пусть луч BA, касательный к внутреннему стакану, падает на поверхность внешнего стакана так, что выходит из него по касательной (рис.10). Тогда наблюдатель увидит вместо воды

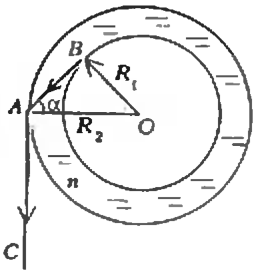


Рис. 10

между стаканами содержимое внутреннего сосуда, т.е. окрашенную жидкость. Из построения и закона преломления следует

$$\sin\alpha = \frac{1}{n},$$

а из ΔAOB —

$$\sin\alpha = \frac{R_1}{R_3},$$

где R_1 и R_2 — радиусы стаканов. Если учесть, что показатель преломления воды $n = 4/3$, то

$$\frac{R_1}{R_3} = \sin\alpha = \frac{1}{n} = \frac{3}{4}.$$

Таким образом, при $R_1 \ge 0{,}75R_2$, если один стакан вставлен соосно в другой, то вся жидкость в широком стакане для наблюдателя имеет тот же цвет, что и в узком.

Вариант 2

1. $\rho = \dfrac{17\rho_0}{18}$.

2. $T_2' = T_2\left(2\dfrac{m_1T_1M_2}{m_2T_2M_1} - 1\right)$; $p_2' = \dfrac{mg}{S}\left(\dfrac{m_1T_1/M_1}{m_2T_2/M_2 - m_1T_1/M_1} - 1\right)$.

3. Тело массой m поедет начиная с расстояния R, когда

$$\frac{kQ^2}{R^2} = \mu mg.$$

Тело массой M сдвинется начиная с расстояния r, когда

$$\frac{kQ^2}{r^2} = \mu Mg.$$

Из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{-kQ^2}{R} = -\frac{kQ^2}{r} + \frac{mv^2}{2} + \mu mg(R - r).$$

В отсутствие зарядов условие соприкосновения можно записать в виде

$$\frac{mv^2}{2} \ge \mu mgr.$$

Окончательно получаем

$$\frac{M}{m} \ge 4.$$

4. Светящийся объект виден невооруженным глазом как точка, начиная с расстояний, когда угол дифракции на зрачке глаза $\alpha_д \sim \lambda/d$ становится сравнимым с угловым размером объекта $\alpha \sim D/l$, где $\lambda \sim 5\cdot 10^{-5}$ см — средняя длина световой волны в оптическом диапазоне, $d \sim 0{,}5$ см — диаметр зрачка в темноте, D — размер объекта, l — расстояние до него. Положив диаметр Солнца равным $D \sim 1{,}4\cdot 10^6$ км, получаем

$$l \sim \frac{dD}{\lambda} \sim 1{,}4\cdot 10^{10} \text{ км}.$$

Кстати, спутники Земли, кроме Луны, имеющие размеры порядка нескольких метров и летающие на высотах нескольких сотен километров, по этим соображениям тоже должны выглядеть, как звезды (точечные объекты), что и наблюдается в действительности.

5. Рядом с серединой длинного магнита поле нулевое, поэтому стрелка располагается так, как показано на рисунке 11, *а*. Если магнит разрезать посередине и половинки развести (рис.11, *б*),

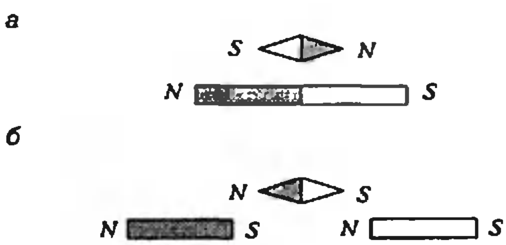


Рис. 11

то на местах разреза проявятся полюса, противоположные полюсам на дальних концах половинок магнита (получить «однополюсник» принципиально невозможно). Поэтому стрелка, притягиваемая новыми торцами, которые ближе и потому сильнее влияют на нее, перевернется.

Вариант 3

1. $D' = 5D$. 2. $l = \frac{v_0^2}{2\mu g}\frac{m_1 m_3^2}{(m_2+m_3)^2(m_1+m_2+m_3)}$.

3. На катоде, по закону сохранения энергии для фотоэффекта, кинетическая энергия электрона составляет

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - A.$$

После пролета сетки кинетическая энергия электрона равна

$$E = h\nu - A + eU_0.$$

Если на аноде заряд $+Q$, а на сетке $-Q$, то

$$E = \frac{eQ}{C},$$

где $C = \frac{3\varepsilon_0 S}{d}$ — емкость конденсатора. Таким образом,

$$Q = \frac{3\varepsilon_0 S(h\nu - A + eU_0)}{ed}$$ при $h\nu > A$.

4. Сила за счет остановки капель зонтом составляет

$$F_{\text{зон}} \sim \rho\frac{h}{t}Sv,$$

где h — дождевой слой воды, накопившийся в атмосфере за время t, ρ — плотность воды, v — скорость капель, S — площадь зонта. Сила давления слоя воды на зонт при толщине слоя δ примерно равна

$$F_{\text{ст}} \sim \rho S\delta g.$$

Тогда

$$F \sim \rho\frac{h}{t}vS + \rho S\delta g \sim 2 \text{ Н}$$

при $h \sim 1$ см, $t \sim 10^3$ с, $S \sim 1$ м^2, $v \sim 10$ м/с, $\delta \sim 0{,}1$ мм.

5. Ударяющий шар слегка проталкивают шар, зажатый в тисках, который переводит полученную им кинетическую энергию в работу против сил трения.

IV Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

МАТЕМАТИКА

1. 753. 2. 25/9. 3. $x = y = z = 0$; $x = y = z = \pm\sqrt{2}/4$. *Указание.* Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$(x - z)(a^2 + ab + b^2) = z - x,$$

где $a = x + y$, $b = y + z$. Отсюда следует, что либо $x = y$, либо $a^2 + ab + b^2 = -1$, но последнее равенство невозможно.

4. а) Нет, так как $f(2) = g(2) = 6$, а 2 не делится на 6. б) Нет, так как $f(1/2) = g(1/2) = 1$. в) Да. $x = (f - g)^2 + 2g - 3f$.

5. $(a + b)/2$. *Указание.* Докажите, что $AA'B'B$ — трапеция, в которой OO' — средняя линия.

6. а) Нет; б) нет. *Указания.* а) Четность числа минус единиц на контуре пятиугольника не меняется. б) Произведение 9 чисел, расставленных в точках, закрашенных на рисунке 12, не меняется.

7. 3975. *Указание.* Докажите, что $f(3k) = 3f(k)$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$. Вообще $f(n) = n + 3^k$, если $3^k \le n < 2\cdot 3^k$, $f(n) = 3n - 3^{k+1}$, если $2\cdot 3^k \le n < 3^{k+1}$.

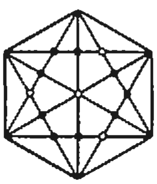


Рис. 12

ФИЗИКА

1. Для прямоугольного ангара $v_0 = \sqrt{g(2h + d)} \approx 20$ м/с; для полуцилиндрического — $v_0 = \sqrt{2\sqrt{2}gR} \approx 14$ м/с. 2. $p = 1{,}2p_{\text{атм}}$.

3. $u = 1/2U_0(1 + \cos\omega t)$, где $\omega = 1/\sqrt{LC/2}$; механический аналог: колебания грузика между двумя пружинами, одна из которых поджата в начальный момент времени.

4. $d = \sqrt{2\lambda L} \approx 0{,}3$ мм, где $\lambda = 5{,}5\cdot 10^{-7}$ м — средняя длина волны видимого света.

5. Если $\mathrm{tg}\,\alpha < \mu$, то $a_{\text{б}} = 0$, $a_{\text{д}} = 2/3g\sin\alpha$ и $a_{\text{к}} = 1/2g\sin\alpha$, т.е. первым съезжает диск, затем кольцо, а брусок остается неподвижным; если $\mu < \mathrm{tg}\,\alpha < 2\mu$, то $a_{\text{б}} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, $a_{\text{д}} = 2/3g\sin\alpha$ и $a_{\text{к}} = 1/2g\sin\alpha$, т.е. первым съезжает диск, затем кольцо и потом брусок; если $2\mu < \mathrm{tg}\,\alpha < 3\mu$, то $a_{\text{б}} = a_{\text{к}} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ и $a_{\text{д}} = 2/3g\sin\alpha$, т.е. первым съезжает диск, а затем брусок и кольцо съезжают одновременно; если $\mathrm{tg}\,\alpha > 3\mu$, то $a_{\text{б}} = a_{\text{д}} = a_{\text{к}} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, т.е. все тела съезжают одновременно.

6. $v_0 = \sqrt{gR(7\pi + 2\sqrt{2}/9)}$. 7. $T_3 \approx 6$ млрд лет.

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

(см. с. 14)

Назовем человека *порядочным*, если он не доносит на то тайное общество, в котором он состоит. Кто доносит на общество всех порядочных людей?

КВАНТ

Адрес редакции:
103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250-33-54, 251-55-57

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ № 320

Гений ли «Гениус»?

В «Кванте» № 1, 1995 мы уже рассказывали о крупном блиц-турнире в Мюнхене, где отличилась программа «Fritz»: она не только обыграла чемпиона мира и многих знаменитых гроссмейстеров, но и вместе с Гарри Каспаровым вышла победительницей состязания. Правда, в дополнительном матче Каспаров сумел взять реванш, разгромив робота со счетом 4:1. Прошло три месяца, и на турнире по быстрым шахматам в Лондоне другая компьютерная программа — «Pentium Genius» — неожиданно «отомстила» за своего коллегу. Произошла настоящая сенсация в мире шахмат, да и в компьютерном мире тоже. Впервые в истории электронный гроссмейстер выиграл у чемпиона мира матч из двух партий при вполне приличном контроле времени — 25 минут на партию. И самое главное, что на сей раз после поражения от машины Каспаров уже не имел возможности взять реванш в дополнительных встречах. Если за точку отсчета в развитии современных шахматных компьютеров взять 1974-й год, когда состоялся первый чемпионат мира среди машин, то можно сказать, что этим успехом робот весьма достойно отметил 20-летний юбилей.

Что представляет собой «Пентиум Гениус», новый шахматный герой? «Гениус» — программа, которую разработал английский гроссмейстер программирования Ричард Лэнг, кстати, в прошлом году она завоевала звание чемпионки мира среди ЭВМ. В Лондоне «Гениус» играл на персональном компьютере (PC) с микропроцессором «Пентиум» — это последняя модель американской фирмы «Интел». Как мы знаем, этот микропроцессор обеспечивает PC большее быстродействие, чем широко распространенные процессоры семейств 386 или 486. Впрочем, данному обстоятельству, как мне кажется, придается слишком много внимания. Конечно, благодаря «Пентиуму» персональные компьютеры увеличили скорость расчета вариантов, но до суперкомпьютеров им пока далеко. Даже «Крэй блиц», чемпионка мира среди ЭВМ 1983 и 1986 годов, играла на более мощной, чем современные PC, машине «Крэй»...

На самом деле, качественный скачок в машинной игре произошел не столько за счет технических новшеств, сколько благодаря применению новых идей в алгоритме игры. Если раньше машина анализировала позицию на строго заданное число ходов, то ныне глубина расчета определяется различными эвристическими правилами: она зависит от ситуации на доске, от количества материала, от наличия объектов атаки и т.д.

Благодаря эвристическому методу машина улучшила позиционную игру и стала увереннее ориентироваться в окончаниях, особенно тактического характера. Кстати, в обеих партиях «Гениуса» с Каспаровым возник эндшпиль, где у каждой стороны было по ферзю и коню, что обычно ведет к острой перепалке и не требует сверхдалекого расчета. И машина оказалась на высоте — она переиграла чемпиона мира в первой партии и спаслась во второй, играя без пешки.

Все же думаю, что сила шахматных роботов сейчас несколько преувеличивается, и пока любой гроссмейстер в состоянии справиться с ними. Правда, при обязательном условии, что он будет относиться к электронному сопернику столь же серьезно, сколь и к белковому. Сыграв с машиной несколько партий, гроссмейстер всегда обнаружит у нее ахиллесову пяту, и дело вскоре пойдет на лад. Лондонский турнир показал, что происходит, когда человек боится машины, пугается одного ее вида. После фиаско чемпиона мира гроссмейстер Николич сильно нервничал, не верил в себя, что тут же сказалось на игре — он уступил роботу в совершенно выигранной позиции в первой партии, затем сдался и во второй. Пришла очередь Ананда сразиться с электронным чудом. Индийский гроссмейстер не раз говорил, что охотно играет с машинами, получает от этого и удовольствие, и пользу. И вот результат — счет 2:0 в пользу человека, причем компьютер не оказал ни малейшего сопротивления...

Не стоит забывать, что в Лондоне контроль времени был 25 минут на партию, и это все-таки еще не настоящие шахматы. Правда, московский ученый Алексей Маняхин, один из авторов программы «Кентавр», соперничающей с «Гениусом», высказал довольно неожиданную гипотезу...

В блице преимущество явно на стороне машины, увеличение времени выгодно человеку, и оптимальный контроль для него 20 — 25 минут на партию (т.е. именно быстрые шахматы). За это время машина успевает продвинуться в своих расчетах не намного глубже, чем за пять минут, а для человека разница весьма существенна. Однако дальнейшее увеличение времени вновь идет на пользу машине, которая выходит на новый уровень расчета: глубина перебора увеличивается на несколько ходов.

Такова точка зрения программиста. Шахматные профессионалы рассуждают иначе: в каждой партии имеются один-два критических момента, когда принимаются важные стратегические решения, а далее все разыгрывается как по нотам. Но при укороченном контроле на принятие таких принципиальных решений времени часто не хватает... Ну что ж, подождем, когда состоится матч между ЭВМ и чемпионом мира при нормальном контроле времени. Может быть, тогда мы и получим ответ на вопрос: *гений ли «Гениус»?*

Приведем теперь сенсационную победу робота.

Г. Каспаров — «Пентиум Гениус»

Славянская защита

1. c4 c6 2. d4 d5 3. Kf3 Kf6 4. Фc2 dc 5. Ф:c4 Cf5 6. Kc3 Kbd7 7. g3 e6 8. Cg2 Ce7 9. 0-0 0-0 10. e3 Ke4 11. Фe2 Фb6 12. Лd1 Лad8 13. Ke1 Kdf6 14. K:e4 K:e4 15. f3 Kd6 16. a4 Фb3 17. e4 Cg6 18. Лd3 Фb4 19. b3. У белых мощный пешечный центр, а теперь еще и неприятная угроза Ca3. Однако машина делает тонкий ход, налаживая взаимодействие своих фигур. **19. ... Kc8! 20. Kc2 Фb6 21. Cf4?** Лучше было сразу 21. Ce3. Теперь же черные проводят освобождающий маневр **21. ... c5**, уравнивая игру. **22. Ce3 cd 23. K:d4 Cc5 24. Лad1 e5 25. Kc2 Л:d3 26. Ф:d3 Ke7 27. b4 C:e3+ 28. Ф:e3 Лd8! 29. Л:d8+ Ф:d8 30. Cf1.** Практические шансы на победу белые сохраняли, жертвуя фигуру за две пешки: 30. Ф:a7 Фd1+ 31. Cf1 Ф:c2 32. Ф:d7, теперь же позиция полностью уравнивается.

30... b6 31. Фc3 f6 32. Cc4+ Cf7 33. Ke3 Фd4 34. C:f7+ Kp:f7 35. Фb3+? Понимая, что размен ферзей 35. Ф:d4 ed 36. Kc4 Kc6 37. b5 Ke5 38. K:e5 fe 39. f4 ведет к ничьей, Каспаров дает импульсивный шах, и в результате робот получает перевес в эндшпиле.

35... Kpf8 36. Kpg2 Фd2+ 37. Kph3 Фc2! 38. Kg2 h5. Сильный ход, подчеркивающий, что белому королю и на краю доски несладко. **39. Фe3 Фc4 40. Фd2 Фe6+ 41. g4 hg+ 42. fg Фc4 43. Фe1 Фb3+ 44. Ke3 Фd3!** После взятия на a4 белые еще могли упорно сопротивляться, потеря же пешки e4 не оставляет им никаких надежд. **45. Kpg3 Ф:e4 46. Фd2 Фf4+ 47. Kpg2 Фd4 48. Ф:d4 ed 49. Kc4 Kc6 50. b5 Ke5 51. Kd6 d3 52. Kpf2 K:g4+ 53.Kpe1 K:h2,** и вскоре чемпион мира остановил часы, поздравив электронного соперника с победой.

Е. Гик

Индекс 70465

Вниманию авторов и читателей журнала

КВАНТ

Сообщаем основные правила подготовки рукописей, присылаемых в наш журнал, а также информацию для тех, кого интересуют отдельные номера журнала.

I. Рукописи, присылаемые в редакцию журнала «Квант», должны удовлетворять следующим требованиям:

1) Рукопись представляется только в наш журнал.
2) Автор адресует статью в одну из рубрик журнала: общие статьи, школа в «Кванте», математический кружок, лаборатория «Кванта», практикум абитуриента и т.д.
3) Объем статьи должен соответствовать рубрике и во всяком случае не превышать 12 машинописных страниц.
4) В редакцию представляются два машинописных экземпляра (первый и второй), напечатанные через два интервала (третий экземпляр остается у автора).
5) Статья подписывается автором (или группой авторов). После подписи указываются следующие сведения: фамилия, имя и отчество (полностью), место работы или учебы, подробный домашний адрес (с почтовым индексом).
6) Иллюстративный материал (рисунки, фотографии) прилагается к статье на отдельных листах тоже в двух экземплярах. Подписи к иллюстрациям даются на обратной стороне рисунка или на отдельном листе. В тексте статьи на иллюстрации делаются соответствующие ссылки.
7) К рукописи прилагается один конверт с марками и обратным адресом автора.
8) Рукописи рецензируются и рассматриваются редакционной коллегией журнала «Квант» в течение трех месяцев с момента получения, после чего автору сообщается о судьбе рукописи.

Рукописи, не принятые к печати, не возвращаются.

II. Если Вы не являетесь подписчиком «Кванта» и хотите купить отдельные номера журнала (или приложения к нему) за текущий, а также и за предыдущие годы, Вы можете это сделать в нашей редакции ежедневно, кроме субботы и воскресенья, с 11 до 17 часов.

Наложенным платежом журнал не высылается.

III. По всем вопросам, связанным с полиграфическими дефектами номеров журнала (и приложения к нему), просим обращаться в Чеховский полиграфический комбинат (142300 г. Чехов Московской обл.).